Matematikus szak, első évfolyam, első félév

Első zárthelyi — megoldásvázlatok

1. Az kell, hogy $-2+2i$ a polinomnak és deriváltjának is gyöke legyen. Akár trigonometrikus alakkal számolva, akár azt észrevéve, hogy $(-2+2i)^4 = -64$, azt kapjuk, hogy $(-2+2i)^{1999} = -2^{2998}(1+i)$ és $(-2+2i)^{1998} = 2^{2997}i$ (4 pont). Behelyettesítve, és a kapott egyenletrendszert megoldva $u = -1999 \cdot 2^{2997}i$ és $v = -1998 \cdot 2^{2998}(1+i)$ adódik (2 pont).

2. Mivel $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$, ezért $\Phi_{24}(x) = \Phi_6(x^4) = x^8 - x^4 + 1$ (2 pont), tehát $\sigma_4 = -1$, $\sigma_8 = 1$ (1 pont). Az alaptétel szerinti algoritmussal számolva adódik, hogy a keresett összeg $\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 - 2\sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_5 = 0$ (3 pont). *Második megoldás:* a keresett összeg $s_3\sigma_2 - s_4\sigma_1 + s_5 = 0$. *Harmadik megoldás:* mindegyik ε_i helyére helyettesítsük be az ellentettjét. Ekkor az összeg ellentettjére változik, hiszen minden tag ötödfokú, másrészt nem változik, hiszen primitív 24-edik egységgyök ellentettje is az.

3. Például $f(x) = 4x^5 + 4x^3 - 4x + 4$ jó, mert $x+1$-et helyettesítve $f(x+1)/4$ teljesíti $p=2$-re a Schönemann-Eisenstein feltételeit.

4. Ha ε egy n-edik egységgyök, akkor $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{n-1}$, és így az x^{n-1} ilyen polinom (4 pont). Ez a legalacsonyabb fokú az interpoláció egyértelműsége miatt (2 pont).

5. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ha $3 \nmid n$, akkor $\Phi_n(x^3) = \Phi_n(x)\Phi_{3n}(x)$. Ez azonnal adódik, ha a $\prod_{d|n}\Phi_d(x) = x^n - 1$ képletben x helyére x^3-t írunk (majd $x^{3n}-1$-et is felbontjuk körosztási polinomok szorzatára). Az állítás úgy is igazolható, hogy belátjuk: mindkét oldalnak ugyanazok a gyökei, mindegyik egyszeres, és mindkét oldal normált.

6. Belátjuk, hogy $|z| > |c|+2$ esetén $|z^2+c| > |z|+1$. Valóban, a háromszög-egyenlőtlenség miatt $|z^2+c-c| \le |z^2+c| + |-c|$, és így

$$|z^2+c| \ge |z^2| - |-c| = |z|^2 - |c| > |z|(|c|+2) - |c| > |z| + |c| + 1 - |c|\,.$$

Tehát ilyen z esetén a sorozat nem korlátos, hiszen minden tagja legalább eggyel nagyobb abszolút értékű, mint az előző. Így J_c benne van az origó körüli $|c|+2$ sugarú körben, és ezért korlátos. (Kis finomítással belátható, hogy J_c valójában már a $|c|+1$ sugarú körben is benne van).