Matematikus szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont. Mindegyik feladat hat pontot ér, az osztályzat elégtelen, ha nincs lényegében megoldott feladat (azaz ami legalább öt pontot kapott), különben pedig az összpontszám hatodrészének egész része.

1. *Ha az* $f \in S_6$ *permutációra teljesül, hogy* $(123)(42) \circ f \circ (256)(123456) = (4365)(12)$, *akkor mi lehet* f *ciklusfelbontása, rendje és előjele?*

2. *Bontsuk az* $x^4 + 5x^2 + 3x + 4$ *polinomot irreducibilisek szorzatára* $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ *és* $\mathbb{Q}$ *felett.*

3. *Meg lehet-e változtatni egy tetszőleges determináns első oszlopának alkalmas elemét úgy, hogy a determináns értéke nulla legyen?*

4. *Van-e olyan* I*-től különböző* $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, *melyre* $M^3 = I$*?*

5. *Irreducibilis-e* $\mathbb{Z}[x, y]$*-ban* $x^{12} - 6y^2 + 5$*?*

6. *Legyen* $n \geq 2$ *egész, és* N *az az* $n \times n$*-es* $\mathbb{C}$ *feletti mátrix, melynek főátlójában csupa nulla, azon kívül csupa* 1*-es áll. Határozzuk meg* N *inverzét.*

7*. *Egy permutációt fixpontmentesnek nevezünk, ha* $f(x) = x$ *semmilyen* x*-re sem teljesül. Az* S_{1999} *fixpontmentes permutációi között mi van több: páros, vagy páratlan?*

8.** *Mely* $n > 1$ *egészekre van olyan* I*-től és* $-I$*-től különböző* $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, *melyre* $M^n = I$*?*