Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Kilencedik alkalom

1. *Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_m^+$ illetve $\mathbb{Z}_m^\times$ csoportok elemeinek a rendjeit, ahol $m = 7$, 8, 12.*

2. *Határozzuk meg a g elem rendjét a G csoportban, ha (g, G) rendre $(-1, \mathbb{R}^+)$, $(-1, \mathbb{R}^\times)$, $(17, \mathbb{Z}_{19}^+)$, $(17, \mathbb{Z}_{19}^\times)$, $(17, \mathbb{Z}_{32}^+)$, $(17, \mathbb{Z}_{32}^\times)$, $(x+1, \mathbb{Z}_{11}[x]^+)$, $(5, \mathbb{Z}_{11}[x]^\times)$.*

3. *Legyenek a, n, m pozitív egészek, és $d = (a^n - 1, a^m - 1)$. Mutassuk meg, hogy $o_d(a) \mid n$, és hogy $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.*

4. *Legyen G csoport és $g \in G$. Igazoljuk az alábbiakat.*

a) Ha G elemszáma véges, és legalább 2, akkor G-ben van prímrendű elem.

b) g akkor és csak akkor hatványa g^k-nak, ha $(|g|, k) = 1$.

5. *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét, és számoljuk meg az inverziókat. Tegyük meg ugyanezt a 'hátulról előre' permutációval is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

6. *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét és előjelét.*

$$(1234)(35)(1432)(35) = ? \qquad (12345)^{-1}(234)(12345) = ? \qquad [(12)(23)(34)]^{1999} = ?$$

7. *Bizonyítsuk be az $(x_1 x_2 \dots x_k) = (x_1 x_k)(x_1 x_{k-1}) \dots (x_1 x_3)(x_1 x_2)$ összefüggést. Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előáll legfeljebb $n-1$ darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez legalább $n-1$ transzpozíció kell? [Használjuk fel, hogy egy n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.]*

8. *Bizonyítsuk be, hogy az S_n csoport minden eleme felírható egy olyan sokténye zős szorzat alakjában, melynek minden tényezője (12) vagy $(12 \dots n)$.*

9*. *Egy négy egység oldalú négyzetben 15 egységnégyzet helyezkedik el, ezekre rendre az $1-15$ számok vannak írva. A tizenhatodik négyzet helye üres. A kis négyzetek mozgathatók vízszintesen és függőlegesen: az üres négyzet helyére bármelyik szomszédja betolható. A játék célja az, hogy egy véletlenszerűen összekevert állapotból visszaállítsuk az alapsorrendet, azaz azt, amelyben a számok sorfolytonosan, emelkedő sorrendben követik egymást, és az üres négyzet a legalsó sor jobb oldalán van. Bizonyítsuk be, hogy ez a visszaállítás nem lehetséges abból a helyzetből kiindulva, amely az alapsorrendtől csak abban tér el, hogy a 14-es és 15-ös számú négyzetet megcseréljük (az üres négyzet helye is ugyanaz).*

10. *Bizonyítsuk be, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.*

11. *Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor hatványa egy ciklusnak, ha ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusokat nem írjuk ki).*

12. *Hány másodrendű elem van S_5-ben?*

13. *Adjuk meg az összes $f \in S_n$ permutációt, melyre $f \circ (1, 2, \dots, n) = (1, 2, \dots, n) \circ f$.*

14. *Bizonyítsuk be, hogy $f, g \in S_n$ esetén akkor és csak akkor létezik olyan $h \in S_n$, melyre $f = h^{-1} g h$, ha f diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik, mint amikor g-t bontjuk fel.*