Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Nyolcadik alkalom

1. *Döntsük el az alábbi $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy művelettartóak-e.*
a) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
b) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
c) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = e^x$.
d) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.
e) $G_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.
f) $G_1 = \mathbb{R}[x]$ *mint gyűrű,* $G_2 = \mathbb{C}$ *mint gyűrű,* $\varphi(f) = f(i)$.

2. *Bontsuk fel az $x^4+x^3+x^2+1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}_2$ felett, határozzuk meg a racionális gyökeit, és ezek alapján mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis.*

3. *Bontsuk az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.*

4. *Legyen $f(x, y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x, y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $\mathbb{C}[y]$ hányadostestét.*
a) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ feletti polinom?
b) Következik-e a Schönemann-Eisenstein tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ felett?
c) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x, y]$-ban?

5. *Igaz-e, hogy az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ alakú számok alkotta gyűrű hányadosteste izomorf az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ alakú számok testével?*

További gyakorló feladatok

6. *Mutassuk meg, hogy a mod m maradékképzés $\mathbb{Z}$-ből $\mathbb{Z}_m$-be művelettartó. Vezessük le ebből, hogy $\mathbb{Z}_m$ gyűrű. (Vö. körosztási jegyzet, 3. Fejezet eleje.)*

7. *Ha R és S gyűrűk, és $\varphi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, akkor mutassuk meg, hogy $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mapsto \varphi(a_0)+\varphi(a_1)x+\cdots+\varphi(a_n)x^n$ is homomorfizmus $R[x]$-ből $S[x]$-be.*

8. *Igazoljuk, hogy ha R kommutatív egységelemes gyűrű, akkor $R[x][y] \cong R[x, y]$.*

9. *Igazoljuk, annak felhasználásával, hogy π transzcendens, hogy az $a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n$ alakú számok, ahol $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, részgyűrűt alkotnak $\mathbb{R}$-ben, amely izomorf $\mathbb{Q}[x]$-szel.*

10. *Mutassuk meg, hogy az $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ polinomok $\mathbb{Z}[x]$-beli legnagyobb közös osztója a következő módon határozható meg. Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust $\mathbb{Q}$ felett, a kapott racionális együtthatós polinomot írjuk fel rh alakban, ahol $r \in \mathbb{Q}$ és $h \in \mathbb{Z}[x]$ primitív polinom. Határozzuk meg f és g együtthatóinak legnagyobb közös osztóját, az eredmény ennek a számnak a h-szorosa. Hogyan módosítható ez az eljárás, ha két $\mathbb{C}[x, y]$-beli polinom legnagyobb közös osztóját keressük?*

11*. *Kiegészítés a IV/13. feladathoz. Tegyük fel, hogy n egész alapponthoz keresünk interpolációs polinomot, és az itt felvett értékek maguk is egészek, de a kapott legfeljebb $n - 1$-edfokú interpolációs polinom mégsem egész együtthatós. Lehetséges-e, hogy az interpoláció egy magasabb fokú, de egész együtthatós polinommal is elvégezhető?*

12. *Általánosítsuk az interpolációt többváltozós polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény.*

Érdemes még megoldani a körosztási jegyzetből a 3.9. és 3.12. Feladatokat is.