Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Hetedik alkalom

1. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? A kommutatív gyűrűkben határozzuk meg az invertálható elemeket.*

a) $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ *a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

b) *Tetszőleges Abel-csoport, a szorzást úgy definiáljuk, hogy minden szorzat nulla.*

c) *Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés.*

2. *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.*

a) *Ha $\circ$ kétváltozós művelet egy A halmazon, akkor csak egy neutrális eleme lehet.*

b) *Ha e neutrális elem a $\circ$ kétváltozós asszociatív műveletre nézve, akkor minden elemnek legfeljebb egy (kétoldali) inverze lehet (e-re nézve).*

c) *Ha S gyűrű, és 0 az összeadás neutrális eleme (azaz S nulleleme), akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $s * 0 = 0 * s = 0$.*

d) *Egy egységelemes R gyűrű invertálható elemei a szorzásra nézve csoportot alkotnak.*

3. *Végezzük el $\mathbb{Z}_{17}$-ben a $2/3$ és az $5/12$ osztásokat. Mutassuk meg, hogy ez egy test.*

4. *Mely m-ekre van $\mathbb{Z}_m[x]$-ben olyan polinom, amelynek több gyöke van, mint a foka?*

5. *Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.*

6. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*

a) *$\mathbb{Z}_2$ felett x^8+x^2+1, x^5+x+1, $x^5+x^4+x^3+1$, x^5+x^3+1.*

b) *$\mathbb{Z}_{17}$ felett x^2+1, x^4+1, x^8+1, $x^{17}+1$, $x^{17}+2$.*

7. *Adjunk meg egy olyan polinomot egy alkalmas test felett, melynek van olyan nyolcszoros u gyöke, hogy u a polinom deriváltjának is (pontosan) nyolcszoros gyöke. Igaz-e tetszőleges test felett, hogy ha egy elem egy polinomnak egyszeres gyöke, akkor a deriváltjának biztosan nem gyöke?*

8. *Mutassuk meg tetszőleges test felett, hogy ha az f polinomnak van többszörös tényezője (azaz g^2 alakú osztója, ahol g nem konstans polinom) akkor $(f,f') \neq 1$. Mely p prímekre igaz, hogy x^n-1-nek van többszörös tényezője $\mathbb{Z}_p$ felett?*

9. *Lehet-e egy $\mathbb{Q}$ illetve $\mathbb{Z}_2$ felett irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben?*

10. *Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, p egy prímszám, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.*

b) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ illetve $\mathbb{Q}$ felett.*

c) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

d) *Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ felett k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.*

e) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.*

Adjunk az első Gauss-lemmára és a Schönemann-Eisenstein-tételre új bizonyítást a polinom mod p vizsgálatával.