Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Hatodik alkalom

Módszerek az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett:
- Egy nem konstans polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és primitív.
- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha nincs racionális gyöke (használjuk a racionális gyöktesztet).
- Bontsuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ felett, és használjuk a felbontás egyértelműségét.
- A Schönemann-Eisenstein kritérium.
- f akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in \mathbb{Q}$) az.
- A $\Phi_n(x)$ körosztási polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám (ld. köv. feladatsor).

1. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium:* $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ $(n=?)$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha p prímszám, akkor az $(x+y)^p-x^p-y^p$ polinom osztható p-vel $\mathbb{Z}[x,y]$-ban.*

3. *Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein kritérium a $\Phi_p(x+1)$ polinomra, ahol p prímszám?*

4. *Irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett* x^3+9, x^4+1, x^4-2x+1, x^4+4x+1, $x^{10}-x^5+1$?

5. *A $6x^4-9x+1$ polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

6*. *Igazoljuk, hogy az $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha $a_1,\dots,a_n$ páronként különböző egész számok.*

7*. *Van-e olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, hogy minden $g(x)$ egész együtthatós polinomra az $f\big(g(x)\big)$ polinom irreducibilis legyen $\mathbb{Q}$ fölött?*

További gyakorló feladatok

8. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*
a) *$\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R}$ felett* x^7+x+1, x^2-2, x^2+x+1.
b) *$\mathbb{Q}$ felett* $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4.
c) *$\mathbb{Z}$ felett* $x^4+2x+27$, $3x^7+6x-18$, x^6+1, x^3+7x-3, $x^4+3x^3+x^2+1$.

9. *Fogalmazzuk meg precízen, és bizonyítsuk is be, milyen értelemben egyértelmű egy egész együtthatós polinom felbontása egy egész szám és egy primitív polinom szorzatára. Mennyiben egyértelmű egy racionális együtthatós polinom felbontása egy racionális szám, és egy (egész együtthatós) primitív polinom szorzatára?*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha $a,b\in\mathbb{Q}$, és $a\neq 0$, akkor tetszőleges $f\in\mathbb{Q}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha $f(ax+b)$ az. Igaz-e a megfelelő állítás $\mathbb{R}$ felett?*

11. *Írjuk fel az $x_1^4+\dots+x_n^4$ polinomot az elemi szimmetrikus polinomok segítségével a közvetlen módszerrel is, és a Newton-formulák felhasználásával is.*