Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Ötödik alkalom

Legyen $n \geq 1$ és $\Phi_n(x) = (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_k)$, ahol $\xi_1, \ldots, \xi_k$ az összes primitív n-edik egységgyök (Φ_n az úgynevezett *n-edik körosztási polinom*, és $\varphi(n) = k$ az Euler-függvény). Ekkor $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$, mert

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1\,.$$

1. *Számítsuk ki Φ_{12}-t kétféleképpen, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.*

2. *Mutassuk meg, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.*

3. *Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor z és $\overline{z}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek. Igazoljuk, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke.*

4. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele. Határozzuk meg a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ feletti polinomok körében az egységeket.*

5. *Bontsuk fel a $6(x^2-2)(x^2+1)$ polinomot $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ felett felbonthatatlanok szorzatára.*

6. *Adjuk meg a $2x^3 + 3x + 5$ polinom racionális gyökeit, és döntsük el, felbonthatatlan-e ez a polinom $\mathbb{Q}$ felett.*

7. *Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x^4 + x + 1$ polinom? És $\mathbb{R}[x]$-ben?*

8. *Irreducibilis-e $x^4 + 4$ illetve $x^4 + 9$ a $\mathbb{Q}$ felett?*

9. *Bontsuk fel az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinomot $\mathbb{R}$ felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ feletti felbontást is.*

További gyakorló feladatok

10. *Vezessük le a gyöktényező kiemelhetőségéről szóló állítást a maradékos osztás tételéből.*

11. *Állapítsuk meg az $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a szokásos visszahelyettesítési eljárással) $fp + gq$ alakban, ahol p és q alkalmas polinomok. Függ-e az eredmény attól, hogy ezeket a polinomokat $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$ felett tekintjük-e?*

12. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x : 2$ maradékos osztás?*

13. *Bizonyítsuk be, hogy a kitüntetett közös osztó asszociáltság erejéig egyértelmű.*

14. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \geq 1$ egészre $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.*

15*. *Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát. Általánosítsuk a feladatot!*

16*. *Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$. Számítsuk ki ennek alapján a $\Phi_n(x)$ polinomokat, ha $n = 36, 72, 144, 100$.*