**Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév**

*Negyedik alkalom*

**1.** *Az alábbi $p$ polinomot bontsuk homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a $p^7$ polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot.*

$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = ix_1x_2x_3x_4^2 - x_1^2x_3^3 + 3x_1^3x_2 + \pi x_1^2x_2^3 + x_4 - x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3x_4 - 6x_1^2x_2^2x_4\,.$

**2.** *Egy 3-határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^2x_2^2x_3$. Lehet-e neki tagja $x_1x_2^3x_3$? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk fel, mi az eljárás első lépése?*

**3.** *Az első feladatban szereplő polinomba helyettesítsük be mindegyik $x_i$ helyére a négy határozatlanú $\sigma_i$ elemi szimmetrikus polinomot. Adjuk meg a kapott polinomnak egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.*

**4.** *Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1? A Horner-elrendezéssel végezzük a kiemelést.*

**5.** *Legyen $f$ olyan $n$-edfokú, racionális együtthatós polinom, melynek $i$ hatszoros gyöke. Lehet-e $n = 10$? Adjuk meg az összes ilyen polinomot, melynek foka 12.*

**6.** *Mely $b \in \mathbb{C}$ értékekre van az $x^n + bx^k + 1$ polinomnak háromszoros gyöke?*

**7*.** *Az $n$-edfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak nincs többszörös gyöke. Lehet-e legalább $n$-szeres gyöke az $[f']^2 - ff''$ polinomnak?*

**8.** *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy $f$ racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha „racionális” helyett mindenütt „egész” szerepel?*

**9.** *Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.*

**10.** *Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

*Gyakorló feladatok*

**11.** *A Horner elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x) + f(2)$ alakban. Igazoljuk általánosan is, hogy a $p(x) = (x-z)q(x) + p(z)$ felírásban a $q$ együtthatói éppen a Horner-elrendezés alsó sorában szereplő számok.*

**12.** *A Lagrange interpoláció segítségével adjunk meg olyan polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 7$ és $f(-1) = 0$.*

**13.** *Létezik-e olyan egész együtthatós $f$ polinom, melyre $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ és $f(18) = 520$?*

**14.** *Igaz-e, hogy szimmetrikus polinom minden homogén komponense is szimmetrikus?*

**15.** *Határozzuk meg az $x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$ polinom többszörös gyökeit a formális deriválás módszerével.*

**16.** *Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 + 1$-gyel illetve $x^2 - 1$-gyel?*