Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Harmadik alkalom

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések. Ha $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$, akkor a σ_k együtthatókat az x_i *elemi szimmetrikus polinom*jainak nevezzük. A σ_k kiszámításához az $x_1, \dots, x_n$ közül az összes lehetséges módon kiválasztunk k darabot, a kiválasztott x_i-ket összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \qquad \binom{n}{1} = n \quad \text{tag}$$

$$\sigma_k = x_1 x_2 \dots x_k + \dots \qquad \binom{n}{k} \quad \text{tag}$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n \qquad \binom{n}{n} = 1 \quad \text{tag.}$$

1. *Írjuk fel az x^4+4 polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

2. *Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú komplex együtthatós polinom n (komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

3. *Legyenek $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ az összes n-edik egységgyökök.*
- a) *Bontsuk gyöktényezős alakra az $x^4 - 1$ polinomot.*
- b) *Bizonyítsuk be, hogy $x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)\dots(x - \varepsilon_n)$.*
- c) *A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.*
- d) *Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

4. *Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

5. *Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).*

6. *Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a + b$, $a + c$, $b + c$.*

7. *Írjuk fel az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként a $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i^2 x_j$ összeget.*

8*. *Legyen f valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy f előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*

Néhány eredmény

5. A reciprokösszeg -1, a köbösszeg $n \geq 3$ esetén $3\sigma_3 + \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$, vagyis az eredmény $n = 2$-re 2, $n = 3$-ra és 4-re -3, $n \geq 5$-re 0.

6. $x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ illetve $x^3 + 3x - 1$.

7. $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.