Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Második alkalom

1. *Számítsuk ki* $(1+i)^{1999}$ *értékét. Mivel egyenlő* $1+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\dots$ *?*

2. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et. (Ötlet: a binomiális tétel segítségével számítsuk ki* $\cos x+i\sin x$ *hetedik hatványát.)*

3*. *Hozzuk zárt alakra a* $\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx$ *összeget.*

4. *Döntsük el, melyek egységgyökök az alábbi számok közül. Mennyi ezek rendje? Mely* n*-ekre lesznek ezek a számok* n*-edik egységgyökök? És primitív* n*-edik egységgyökök?*

$$1\,,\quad -1\,,\quad i\,,\quad 1+i\,,\quad (1+i)/\sqrt{2}\,,\quad \cos(\sqrt{2}\pi)+i\sin(\sqrt{2}\pi)\,,\quad \cos(336^\circ)+i\sin(336^\circ)\,.$$

5. *Ha* ε *primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet* $o(-i\varepsilon)$*?*

6. *Mutassuk meg, hogy ha* $n>0$ *egész,* $\varepsilon\in\mathbb{C}$*, és* $\varepsilon^n=i$*, akkor* $4\mid o(\varepsilon)\neq\infty$*.*

7. *Legyenek* m *és* n *pozitív egészek.*
a) *Hány közös gyöke van az* $x^n=1$ *és* $x^m=1$ *egyenleteknek?*
b) *Igazoljuk, hogy egy* n*-edik és egy* m*-edik egységgyök szorzata* nm*-edik egységgyök.*
c) *Mutassuk meg, hogy egy* n*-edik és egy* m*-edik primitív egységgyök szorzata akkor és csak akkor* nm*-edik primitív egységgyök, ha* m *és* n *relatív prímek.*

8. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

9. *Mutassuk meg, hogy a* z_1*,* z_2*,* z_3*,* z_4 *páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a*

$$(z_1\,z_2\,z_3\,z_4)=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\bigg/\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}$$

kifejezés valós szám.

10. *Igazoljuk komplex számok felhasználásával Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza rendre* a*,* b*,* c*,* d*, átlóinak hossza pedig* e *és* f*, akkor* $ac+bd\geq ef$*, és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a négyszög húrnégyszög.*

Megoldás az I/9. feladatra. Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, $\varepsilon=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$, $\eta=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$. A szabályos hatszög felrajzolásából látjuk, hogy $\eta=1+\varepsilon$. Ha X jelöli az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög középpontját, akkor az $\overrightarrow{XB}$ vektort 120 fokkal elforgatva az $\overrightarrow{YB}$ adódik, azaz $(B-X)\varepsilon=A-X$, ahonnan

$$X=\frac{A-B\varepsilon}{1-\varepsilon}\,,\quad \text{és hasonlóan}\quad Y=\frac{B-C\varepsilon}{1-\varepsilon}\,,\quad Z=\frac{C-A\varepsilon}{1-\varepsilon}\,.$$

Azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{XY}$ vektort 60°-kal elforgatva az $\overrightarrow{XZ}$-t kapjuk, azaz $(Y-X)\eta=(Z-X)$. A fentieket behelyettesítve és $1-\varepsilon$-nal szorozva:

$$((B-C\varepsilon)-(A-B\varepsilon))\,\eta=(C-A\varepsilon)-(A-B\varepsilon)\,.$$

Beírva, hogy $\eta=1+\varepsilon$, és átrendezve

$$A((-1-\varepsilon+\varepsilon+1)+B(1+\varepsilon+\varepsilon(1+\varepsilon)-\varepsilon)+C(-\varepsilon(1+\varepsilon)-1)=0\,.$$

Ez pedig teljesül, mert $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ (mint a hatszögről leolvasható), és így A, B és C együtthatója is nulla.