Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizenharmadik alkalom: gyakorló feladatok

1. *Egy négyzetes mátrix* felső (alsó) háromszög-mátrix, *ha a főátlónális alatti (feletti) elemek mindegyike* 0. *(Az* a_{ij} *elem a fődiagonális alatt van, ha* $i > j$*, a fődiagonális felett, ha* $i < j$*.) Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

2. *Az* M *és* N *mátrixok* felcserélhetők, *ha* $MN = NM$*. Határozzuk meg azokat az* $n \times n$*-es mátrixokat tetszőleges test fölött, amelyek minden* $n \times n$*-es mátrix-szal felcserélhetők.*

3. *Legyen* $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Határozzuk meg az* $MN - NM$ *nyomát. Bizonyítsuk be, hogy* $MN - NM = I_n$ *lehetetlen. Igaz marad-e az állítás tetszőleges test fölött? És tetszőleges nulla karakterisztikájú test fölött?*

4. *Legyen* $M, N \in T^{n\times n}$*, ahol* T *test. Mutassuk meg, hogy ha* $MN = M$ *és* $NM = N$*, akkor mindkét mátrix* idempotens *(azaz* $N^2 = N$*, illetve* $M^2 = M$*).*

5. *Legyen* $M \in T^{n\times n}$*, ahol* T *test. Bizonyítsuk be, hogy ha* M *idempotens, akkor* $N = I - M$ *is az, és* $MN = NM = O$*.*

6. *Igazoljuk, hogy az* M *négyzetes mátrix akkor és csak akkor* involúció, *azaz* $M^2 = I$*, ha* $(I + M)(I - M) = O$*.*

7*. *Bizonyítsuk be, hogy ha* M nilpotens *(azaz négyzetes, és van olyan* m *természetes szám, amire* $M^m = O$*), akkor* $(I - M)$*-nek létezik inverze.*

8.** *Legyen* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$*, és* ε_j *a* $2\pi j/n$ *szöghöz tartozó* n*-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_{n-1})\,.$$

9*. *Legyen* $p > 2$ *prím, és tekintsük az* $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0 \ (p)$ *kongruenciát, ahol* $p \nmid a_0$*. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \ (p)\,.$$

10. *A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi három egyenletrendszert egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket* $\mathbb{R}$ *felett.*

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 2 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 1 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x \end{cases}$$