Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizenkettedik alkalom

1. *Számítsuk ki az alábbi mátrix-szorzatokat.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Szorozzunk össze két általános, csupa egyesekből álló mátrixot is (amikor lehet). Keressünk olyan kétszer kettes nem nulla mátrixot, melynek négyzete nulla.

2. *Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és $T_{a,b}$ az $ax+by=0$ egyenesre való tükrözést. Mi lesz az (x,y) pont képe ezeknél a transzformációknál? Milyen geometriai transzformáció lesz $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T_{a,b}$, $T_{a,b} \circ F_\alpha$, $T_{a,b} \circ T_{c,d}$?*

3. *Legyen A a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, B pedig az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi lesz ezeknél az $(1,2,3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $A \circ B = B \circ A$?*

4. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - tr(M)M + \det(M)E$ a nullmátrix.*

6. *Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -I$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = I$ egyenlet összes megoldását.*

7. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Az utolsó invertálás házi feladat.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *Írjuk fel az előző feladatban szereplő második és harmadik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.*

9. *Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két különböző embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.*

10. *Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix.*

- a) *Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1,-1\}$.*
- b) *Bizonyítsuk be, hogy $\det M$ akkor és csak akkor páros, ha kiválasztható néhány sor úgy, hogy ezeket összeadva a kapott vektor csupa páros számot tartalmaz.*

11*. *A sakkbajnokság félidejénél azt tapasztalták, hogy nem lehet kiválasztani úgy néhány játékost, hogy bármelyik játékos (a közülük valók is) ezek ellen összesen egész számú pontot szerzett. Igazoljuk, hogy a résztvevők száma páros (mindenki mindenkivel egyszer játszott, győzelem: $1-0$, döntetlen: $0.5-0.5$, saját maga ellen mindenki nulla pontot szerzett.)*