**Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév**

*Tizenegyedik alkalom*

**1.** *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor szerinti kifejtéssel, majd az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, végül a harmadik determináns kivételével a felső háromszög alakra hozás módszerével is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**2.** *Írjuk fel az általános kétszer kettes, majd a háromszor hármas determináns képletét a determináns definíciója alapján. Mutassuk meg, hogy a háromszor hármas determináns értéke nulla lesz, ha két oszlopa egyenlő. Mutassuk meg azt is, hogy a háromszor hármas determináns, mint a második oszlopvektorának függvénye, összegtartó.*

**3.** *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

**4.** *Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

**5.** *Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?*

**6.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy $n$-edrendű, komplex elemű determinánsban $a_{ij}$ az $a_{ji}$ konjugáltja minden $i, j$-re, akkor a determináns értéke valós.*

**7.** *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

**8.** *Egy $1999 \times 1999$-es determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.*

**9.** *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

**10.** *Van-e olyan $123456789 \times 123456789$-es mátrix, melyben csak a 0 és 1 számok szerepelnek, és determinánsa 2?*

**11.** *Legyen $T$ test, $A \in T^{k\times k}$, $B \in T^{m\times m}$, $X \in T^{k\times m}$ és $O$ az $m \times k$-s nullmátrix. Rakjuk össze az $M$ mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen:*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$$

*Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$. Vezessük le ebből az állításból, hogy háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata. Vezessük le a kifejtési tételt is!*