Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizedik alkalom

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned} \qquad \textit{HF:} \quad \begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

3. *Van-e olyan egész együtthatós lineáris egyenletrendszer, ami $\mathbb{Q}$ felett ellentmondásos, $\mathbb{Z}_2$ felett egynél több megoldása van, és $\mathbb{Z}_3$ felett pontosan 1?*

4. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

5. *Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?*

6. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n-1$ összege 1999. Melyek ezek a számok? HF: adott $a \neq b$ számok esetén oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &= 1 \\ a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + b\,x_{n-1} + a\,x_n &= 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ b\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + a\,x_n &= n \end{aligned}$$

7*. *Egy n-szög csúcsaira számokat akarunk úgy írni, hogy bármelyik csúcsból induljunk is el a sokszög mentén, a sorra következő m szám összege 1 legyen. Mely m és n értékek esetén lehetséges ez úgy, hogy valamelyik csúcsra $1/m$-től különböző szám kerüljön?*

További gyakorló feladatok permutációkról

8. *Mi lesz $(12)(234)(456)(15)(34)$ ciklusfelbontása, rendje és előjele?*

9. *Hány hatodrendű elem van S_7-ben?*

10. *Lehet-e S_5 két negyedrendű elemének szorzata negyedrendű?*

11. *Melyik az a legkisebb n szám, melyre S_n-ben van páros, 12 rendű permutáció?*

12. *Írjuk fel az (123456789) ciklust az S_9 alkalmas ötödrendű elemeinek szorzataként.*