Alkalmazott matematikus szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi — megoldásvázlatok

1. A polinom deriváltja $4x^3+2x = 2x(2x^2+1)$ (1 pont). Ha $x=0$ többszörös gyök, akkor $r=0$, ez tehát megoldás (2 pont). Ha nem, akkor a többszörös gyökre $x^2=-1/2$, ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $r=1/4$ adódik (2 pont). Ez tényleg megoldás is, mert az $x^2+1/2$ polinomnak van $\mathbb{C}$-ben gyöke (1 pont).

2. Nincs. Mivel mindkét polinom csupa páros fokú tagból áll, az euklideszi algoritmus elvégzésekor egyik lépésben sem jön be páratlan fokú tag (mert a csupa páros fokú tagokból álló polinomok részgyűrűt alkotnak). *Második megoldás:* A legnagyobb közös osztó osztója x^2+1-nek, tehát ha elsőfokú, akkor az egyetlen gyöke i, vagy $-i$. Osztója az eredeti polinomnak is, tehát i illetve $-i$ annak is gyöke. Visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $s=0$. Ekkor azonban a legnagyobb közös osztó x^2+1, ami nem elsőfokú.

3. Ha $(x-1/2)p(x) = q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, akkor $(2x-1)p(x) = 2q(x)$. A 2 prímtulajdonságú $\mathbb{Z}[x]$-ben a Gauss-lemma szerint, de nem osztója $2x-1$-nek, ezért osztója $p(x)$-nek. *Második megoldás:* Tanult tétel szerint van olyan a/b egyszerűsíthetetlen tört, hogy $(a/b)(x-1/2)$ és $(b/a)p(x)$ is egész együtthatós. Ekkor a páros, és ezért p minden együtthatója is az. *Harmadik megoldás:* Beszorzással, és az együtthatók összehasonlításával sorban a konstans tagtól felfelé haladva (indukcióval) belátjuk, hogy mindegyik együttható páros. *Negyedik megoldás:* Mivel $xp(x) \in \mathbb{Z}[x]$, ezért $\mathbb{Z}[x] \ni xp(x) - (x-1/2)p(x) = (1/2)p(x)$.

4. Az elimináció első két lépése után az eredmény $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & 1-2u \\ \underline{1} & 0 & 5 & 3u-1 \\ 0 & 0 & v-12 & 2-7u \end{array}\right)$ (a vezéregyesek alá vannak húzva, 2 pont). Ahhoz, hogy $\mathbb{Q}$ felett ellentmondásos legyen, az kell, hogy $v=12$ és $2-7u \neq 0$ legyen (2 pont). Ahhoz, hogy $\mathbb{Z}_5$ felett ne legyen ellentmondásos, az kell, hogy $2-7u$ osztható legyen öttel, tehát például $v=12$ és $u=1$ megoldás (2 pont).

5. A racionális gyökteszttel számolva látjuk, hogy $x=3$ gyök (1 pont), ezért (például a Horner-elrendezéssel számolva) az $(x-3)(x^4-12x+1)$ felbontást kapjuk (1 pont). Itt az első tényező irreducibilis, hiszen elsőfokú, a második pedig azért irreduciblis, mert x helyébe $x+1$-et írva teljesül a Schönemann-Eisenstein kritérium feltétele $p=2$-re (4 pont).

6. A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $a+b+c+d=0$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$, $abc+abd+acd+bcd=1$ és $abcd=3$ (1 pont). A keresett $(x-abc)(x-abd)(x-acd)(x-bcd)$ polinom konstans tagja $(abcd)^3=27$ (1 pont). Az x^3-ös tag együtthatója a fentiek szerint $-(abc+abd+acd+bcd) = -1$ (1 pont). Az x-es tag együtthatóját úgy kapjuk, hogy a háromtényezős szorzatok összegének ellentettjét vesszük. Egy ilyen szorzatban a, b, c, d közül az egyik háromszor, a többi kétszer szerepel. Tehát $(abcd)^2$-et kiemelve $a+b+c+d$ adódik, az eredmény tehát nulla (2 pont). Végül az x^2-es tag együtthatójánál a kétszeres szorzatokat kell tekinteni. Itt $abcd$-t emelhetünk ki, és $ab+ac+ad+bc+bd+cd=0$ miatt ez az együttható is nulla (2 pont). *Második megoldás:* Az eredeti polinomot jelölje f. Mivel $abcd=3$, ezért például $3/abc=d$, és így az $f(3/x)$-nek éppen a négy kívánt dolog a gyöke. Ez még nem polinom, de az lesz, ha x^4-nel végigszorozzuk, és hogy normált is legyen, elosztjuk 3-mal. Ehhez a megoldáshoz azonban ellenőrizni kell, hogy a négy kapott gyök különböző, azaz hogy nincs többszörös gyök. Eredmény: x^4-x^3+27.