Alkalmazott matematikus szak, első évfolyam, első félév

Első zárthelyi — megoldásvázlatok

1. Legyen $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ekkor $\mathrm{Im}(z+i) = \mathrm{Im}(x+(y+1)i) = y+1$ (2 pont), és $|z-i| = |x+(y-1)i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ (1 pont). Innen négyzetre emelve és rendezve $y = x^2/4$ adódik (1 pont). Az átalakítás visszafelé is elvégezhető, mert ha $y = x^2/4$, akkor $y \geq 0 > -1$, és ezért az $x^2+(y-1)^2 = (y+1)^2$ egyenlőségből (pozitív értékű) négyzetgyököt vonva a jobboldalon $y+1$ (és nem $-y-1$) keletkezik (1 pont). A kapott görbe tehát parabola (1 pont). (Ez közvetlenül is látszik, hiszen az egyenlőség azt fejezi ki, hogy a z távolsága az i ponttól (vagyis $|z-i|$) ugyanaz, mint az z távolsága az $\mathrm{Im}(z) = -1$ egyenestől (ami $\mathrm{Im}(z+i)$). Tehát ez a vezéregyenes, és az i pont a fókusz.)

2. Ha M nem invertálható, akkor determinánsa nulla (1 pont). Ez az eset meg is valósulhat, például ha M a nullmátrix (1 pont). Ha M invertálható, akkor az egyenletet M inverzével beszorozva azt kapjuk, hogy $M = -iI$ (2 pont). Ebben az esetben M determinánsa $(-i)^{1999} = i$ (2 pont). *Második megoldás:* A determinánsok szorzástétele miatt $\det(M^2) = \det(M)^2 = \det(-iM) = (-i)^{1999}\det(M) = i\det(M)$ (3 pont). Tehát vagy $\det(M) = 0$, például ha $M = O$ (1 pont), vagy $\det(M) = i$, például ha $M = -iI$ (2 pont).

3. Legyen θ szöge α, és e az az egyenes, amelyik a valós tengellyel $\alpha/2$ szöget zár be. Azt látjuk be, hogy ez az egyenes lesz a szimmetriatengely. Ez kiszámolható közvetlenül, koordináta-geometriával is, gyorsabb azonban a következő út. Jelölje ψ az $\alpha/2$ szögű, 1 hosszú számot (ami tehát e irányába mutat). Persze $\psi^2 = \theta$. Azt kell belátni, hogy $w = \psi^2\overline{z}$ éppen a z szám tükörképe az e egyenesre. Forgassuk el az ábrát $-\alpha/2$ szöggel, azaz szorozzunk meg mindent $1/\psi$-vel. Ekkor e-ből a valós tengely lesz, tehát azt kell megmutatni, hogy z/ψ és w/ψ egymás tükörképei a valós tengelyre, azaz egymás konjugáltjai. Ez pedig igaz, mert $\psi\overline{\psi} = |\psi|^2 = 1$ miatt $\overline{w/\psi} = \overline{\psi^2\overline{z}/\psi} = \overline{\psi}z = z/\psi$.

4. Mivel η primitív háromezredik egységgyök, a szöge $360°k/3000$, ahol $(k, 3000) = 1$ (1 pont). Tehát $\varepsilon\eta$ szöge $120° + 360°k/3000 = 360°(1000+k)/3000$ (1 pont). Ha p közös prímosztója $1000+k$-nak és 3000-nek, akkor p nem osztója 1000-nek, hiszen akkor közös prímosztója lenne a relatív prím k és 3000 számoknak. Ezért csak $p = 3$ lehet. Mivel a 3 az első hatványon szerepel a 3000-ben, ezért $1000+k$ és 3000 legnagyobb közös osztója 1 vagy 3 (2 pont). Az első esetben $\varepsilon\eta$ rendje 3000, és ez meg is valósul például, ha $k = 1$ (1 pont). A második esetben pedig $\varepsilon\eta$ rendje 1000, és ez megvalósul, ha pl. $k = 2$ (1 pont).

5. Vonjuk ki hátulról kezdve mindegyik oszlopból az előzőt. Ezután adjuk hozzá minden sorhoz az utolsó sort. Ekkor a főátló felett csupa nulla lesz. Az eredmény $-(-2)^{n-2}(n-3)$.

6. Az $a_{k,\ell}$ elem mellékátlóra vett tükörképe nyilván $a_{n+1-\ell,n+1-k}$ (2 pont). Tehát ha az $a_{1,f(1)}\ldots a_{n,f(n)}$ kifejtési tag tükörképe $a_{g(1),1}\ldots a_{g(n),n}$, akkor $n+1-f(j) = g(n+1-j)$ (1 pont). Belátjuk, hogy az inverziók száma ugyanaz az f és g permutációkban. Valóban, tegyük fel, hogy $1 \leq i < j \leq n$. Ekkor $n+1-j < n+1-i$. Nyilván $f(i) > f(j)$ akkor és csak akkor, ha $g(n+1-j) = n+1-f(j) > n+1-f(i) = g(n+1-i)$. Tehát az $i < j$ „helyen" akkor és csak akkor van inverzió az f-ben, ha az $n+1-j < n+1-i$ „helyen" inverzió van g-ben. Mivel a $j \longleftrightarrow n+1-j$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, ez a megfeleltetés f és g inverziói között is az (2 pont). A keresett permutáció a g inverze, amiben nyilván ugyanannyi inverzió van, mint f-ben (1 pont).