Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Kilencedik alkalom

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések. Ha $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$, akkor a σ_k együtthatókat az x_i *elemi szimmetrikus polinom*jainak nevezzük. A σ_k kiszámításához az $x_1, \dots, x_n$ közül az összes lehetséges módon kiválasztunk k darabot, a kiválasztott x_i-ket összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n & \binom{n}{1} = n & \text{tag} \\ \sigma_k = x_1 x_2 \dots x_k + \dots & \binom{n}{k} & \text{tag} \\ \sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n & \binom{n}{n} = 1 & \text{tag.} \end{array}$$

1. *Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

2. *Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).*

3. *Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a + b$, $a + c$, $b + c$.*

4. *Írjuk fel az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként a $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i^2 x_j$ összeget.*

5. *Az alábbi p polinomot bontsuk homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a p^7 polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot.*

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = i x_1 x_2 x_3 x_4^2 - x_1^2 x_3^3 + 3x_1^3 x_2 + \pi x_1^2 x_2^3 + x_4 - x_1^2 x_2^2 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3 x_4 - 6x_1^2 x_2^2 x_4 \,.$$

6. *Egy 3-határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^2 x_2^2 x_3$. Lehet-e neki tagja $x_1 x_2^3 x_3$? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk fel, mi az eljárás első lépése?*

7. *Az 5. feladatban szereplő polinomba helyettesítsük be mindegyik x_i helyére a négy határozatlanú σ_i elemi szimmetrikus polinomot. Adjuk meg a kapott polinomnak egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.*

8. *Igaz-e, hogy szimmetrikus polinom minden homogén komponense is szimmetrikus?*

Néhány eredmény

2. A reciprokösszeg -1, a köbösszeg $n \geq 3$ esetén $3\sigma_3 + \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$, vagyis az eredmény $n = 2$-re 2, $n = 3$-ra és 4-re -3, $n \geq 5$-re 0.

3. $x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ illetve $x^3 + 3x - 1$.

4. $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.