Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Nyolcadik alkalom

Módszerek az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett:
- Egy nem konstans polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és primitív.
- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha nincs racionális gyöke (használjuk a racionális gyöktesztet).
- Bontsuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ felett, és használjuk a felbontás egyértelműségét.
- A Schönemann-Eisenstein kritérium.
- f akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in \mathbb{Q}$) az.

1. *Adjuk meg a $2x^3+3x+5$ polinom racionális gyökeit, és döntsük el, felbonthatatlan-e ez a polinom $\mathbb{Q}$ felett.*

2. *Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az x^4+x+1 polinom? És $\mathbb{R}[x]$-ben?*

3. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium: $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ ($n=?$).*

4. *Irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett x^3+9, x^4+1, x^4-2x+1, x^4+4x+1, $x^{10}-x^5+1$?*

5. *A 3 prím segítségével vizsgálódva igazoljuk, hogy $6x^7-9x+1$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

6. *Irreducibilis-e x^4+9 a $\mathbb{Q}$ felett?*

7. *Bontsuk fel az x^4-10x^2+1 polinomot $\mathbb{R}$ felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ feletti felbontást is.*

További gyakorló feladatok

8. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*
- *a)* $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett* x^7+x+1, x^2-2, x^2+x+1.
- *b)* $\mathbb{Q}$ *felett* $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4.
- *c)* $\mathbb{Z}$ *felett* $x^4+2x+27$, $3x^7+6x-18$, x^6+1, x^3+7x-3, $x^4+3x^3+x^2+1$.

9. *Bizonyítsuk be, hogy ha $a,b \in \mathbb{Q}$, és $a \neq 0$, akkor tetszőleges $f \in \mathbb{Q}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha $f(ax+b)$ az. Igaz-e a megfelelő állítás $\mathbb{R}$ felett?*

10. *Fogalmazzuk meg precízen, és bizonyítsuk is be, milyen értelemben egyértelmű egy egész együtthatós polinom felbontása egy egész szám és egy primitív polinom szorzatára. Mennyiben egyértelmű egy racionális együtthatós polinom felbontása egy racionális szám, és egy (egész együtthatós) primitív polinom szorzatára?*

11. *Mutassuk meg, hogy az $f,g \in \mathbb{Z}[x]$ polinomok $\mathbb{Z}[x]$-beli legnagyobb közös osztója a következő módon határozható meg. Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust $\mathbb{Q}$ felett, a kapott racionális együtthatós polinomot írjuk fel rh alakban, ahol $r \in \mathbb{Q}$ és $h \in \mathbb{Z}[x]$ primitív polinom. Határozzuk meg f és g együtthatóinak legnagyobb közös osztóját, az eredmény ennek a számnak a h-szorosa.*