Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Hetedik alkalom

1. *Az alábbi halmazokról döntsük el, polinomideálok-e, és főideálok-e. Ha igen, adjuk meg az összes generátorelemet.*

a) *$\mathbb{R}[x]$-ben a nullapolinom, valamint a legfeljebb huszadfokú polinomok.*

b) *$\mathbb{R}[x]$-ben a nullapolinom, valamint a legalább huszadfokú polinomok.*

c) *$\mathbb{R}[x]$-ben azok a polinomok, amelyeknek gyöke a 2.*

d) *$\mathbb{R}[x]$-ben azok a polinomok, amelyeknek gyöke az i.*

e) *$\mathbb{C}[x]$-ben azok a polinomok, amelyeknek gyöke az i.*

f) *$\mathbb{R}[x]$-ben az x^6+2 polinommal osztható polinomok.*

g) *$\mathbb{R}[x]$-ben a $p(x)x+q(x)(x+1)$ alakú polinomok ($p,q\in\mathbb{R}[x]$).*

h) *$\mathbb{Q}[x]$-ben a $p(x)(x^2-1)+q(x)(x^2-3x+2)$ alakú polinomok ($p,q\in\mathbb{Q}[x]$).*

i) *$\mathbb{Z}[x]$-ben azok a polinomok, amelyek konstans tagja hárommal osztható.*

2. *Állapítsuk meg az $f(x)=x^2+1$ és a $g(x)=2x^3+3$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a számelméletben tanult visszahelyettesítési eljárással) $fp+gq$ alakban, ahol p és q alkalmas polinomok.*

3. *Legyen f olyan n-edfokú, racionális együtthatós polinom, melynek i hatszoros gyöke. Lehet-e $n=10$? Adjuk meg az összes ilyen polinomot, melynek foka 12.*

4. *Legyenek $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ az összes n-edik egységgyökök.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy $x^n-1=(x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_n)$.*

b) *Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

5. *A Lagrange interpoláció segítségével adjunk meg olyan polinomot, amelyre $f(0)=3$, $f(1)=3$, $f(4)=7$ és $f(-1)=0$.*

6. *Tegyük fel, hogy az $f\in\mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy f racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha „racionális” helyett mindenütt „egész” szerepel?*

7*. *Létezik-e olyan $f\in\mathbb{Z}[x]$ polinom, melyre $f(10)=400$, $f(14)=440$ és $f(18)=520$?*

8*. *Tegyük fel, hogy n egész alapponthoz keresünk interpolációs polinomot, és az itt felvett értékek maguk is egészek, de a kapott legfeljebb $n-1$-edfokú interpolációs polinom mégsem egész együtthatós. Lehetséges-e, hogy az interpoláció egy magasabb fokú, de egész együtthatós polinommal is elvégezhető?*

9. *A Cardano-képlet felhasználásával oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.*

a) $x^3-6ix-i+8=0$. (A gyökök $(1+\sqrt{3}/2)+(1/2+\sqrt{3})i$, $(1-\sqrt{3}/2)+(1/2-\sqrt{3})i$, $-2-i$, ehhez $\sqrt{D}=\pm(i/2+4)$, $u=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$, $v=2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$.)

b) $x^3+12x-16i=0$. ($D=0$, $u=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$, $v=2(\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ)$, $x^3+12x-16i=(x-2i)^2(x+4i)$, azaz a $2i$ kétszeres gyök.)

c) $x^3-21x+20=0$ (Számoljunk közelítőleg, scientific kalkulátorral végezve a trigonometrikus alakra való oda- és visszakonvertálást. Ekkor $u=\overline{v}=\sqrt{7}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, ahol $\alpha\approx 40.893^\circ$. Ha pontosan számolnánk ez $2+i\sqrt{3}$ lenne. A gyökök 4, 1 és -5.)