Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Hatodik alkalom

1. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? A kommutatív gyűrűkben határozzuk meg az invertálható elemeket.*

a) Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a,b\in\mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

b) Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

c) Az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok, ahol $a,b\in\mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

d) Az $a+b\sqrt[3]{2}$ alakú számok, ahol $a,b\in\mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.

e) Tetszőleges kommutatív csoport, a szorzást úgy definiáljuk, hogy minden szorzat nulla legyen.

f) Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése (tehát $Y+Z$ elemei azok, melyek Y és Z közül pontosan egyben vannak benne), a szorzás pedig a metszetképzés.

2. *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.*

a) Ha $\circ$ kétváltozós művelet egy A halmazon, akkor csak egy neutrális eleme lehet.

b) Ha e neutrális elem a $\circ$ kétváltozós asszociatív műveletre nézve, akkor minden elemnek legfeljebb egy (kétoldali) inverze lehet (e-re nézve).

c) Ha S gyűrű, és 0 az összeadás neutrális eleme (azaz S nulleleme), akkor tetszőleges $s\in S$ esetén $s*0=0*s=0$.

d) Egy egységelemes R gyűrű invertálható elemei a szorzásra nézve csoportot alkotnak. Ennek jele a továbbiakban $R^\times$ lesz. Az R összeadásra vett csoportját R^+ jelöli.

3. *Végezzük el $\mathbb{Z}_{17}$-ben a $2/3$ és az $5/12$ osztásokat. Mutassuk meg, hogy ez egy test.*

4. *Döntsük el az alábbi $\varphi: G_1\to G_2$ leképezésekről, hogy művelettartóak-e.*

a) $G_1=G_2=\mathbb{C}^+$, $\varphi(x)=|x|$ (abszolút érték).

b) $G_1=G_2=\mathbb{C}^\times$, $\varphi(x)=|x|$ (abszolút érték).

c) $G_1=\mathbb{R}^+$, $G_2=\mathbb{R}^\times$, $\varphi(x)=e^x$.

d) $G_1=\mathbb{R}^+$, $G_2=\mathbb{C}^\times$, $\varphi(x)=\cos x+i\sin x$.

e) G_1 az $n\times n$-es komplex mátrixok a szorzásra, $G_2=\mathbb{C}^\times$, $\varphi(A)=\det(A)$.

f) $G_1=\mathbb{Z}_{100}^+$, $G_2=\mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x)=60x$.

g) $G_1=\mathbb{R}[x]^+$, $G_2=\mathbb{C}^+$, $\varphi(f)=f(i)$.

5. *Írjuk fel az összes legfeljebb negyedfokú polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett, határozzuk meg a gyökeiket, és mindegyiket bontsuk fel szorzattá amennyire csak lehet.*

Gyakorló feladatok

6. *Mutassuk meg, hogy a mod m maradékképzés $\mathbb{Z}[x]$-ből $\mathbb{Z}_m[x]$-be művelettartó. Vezessük le ebből, hogy $\mathbb{Z}_m$ gyűrű. Határozzuk meg $\mathbb{Z}_m$ invertálható elemeit.*

7. *Legyen $\circ$ asszociatív művelet az A halmazon, és $a,b,c,d,e\in A$.*

a) Mutassuk meg, hogy $[(a\circ b)\circ(c\circ d)]\circ e=a\circ[\{(b\circ c)\circ d\}\circ e]$.

b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges szorzat értéke független a zárójelezéstől.*

8*. *Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok invertálható elem van.*