Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Ötödik alkalom

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*
a) $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$.
b) $(x^2 + ix + 3)(x^2 + i)$.

2. *Igazoljuk, hogy ha p, q és $p+q$ nem nulla polinomok, akkor* $\mathrm{gr}(p+q) \leq \max(\mathrm{gr}(p), \mathrm{gr}(q))$. *Mutassunk példát arra, amikor nem áll egyenlőség.*

3. *A Horner elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x) + f(2)$ alakban.*

4. *Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1? A Horner-elrendezéssel végezzük a kiemelést.*

5. *Írjuk fel az $x^4 + 4$ polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

6. *Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.*

7. *Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

8. *Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ feletti polinomok körében?*

9. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele. Határozzuk meg a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ feletti polinomok körében az egységeket.*

10. *Határozzuk meg az $x^3 + x$ és az $x^4 + 2x^2 + 1$ polinomok gyöktényezős alakját, közös osztóit, és kitüntetett közös osztóját. Ugyanazt kapjuk-e $\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{Q}$ felett?*

11. *Bontsuk fel a $6(x^2 - 2)(x^2 + 1)$ polinomot $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ felett felbonthatatlanok szorzatára.*

Gyakorló feladatok

12. *Állapítsuk meg az $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a számelméletben tanult visszahelyettesítési eljárással) $fp + gq$ alakban, ahol p és q alkalmas polinomok. Függ-e az eredmény attól, hogy ezeket a polinomokat $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$ felett tekintjük-e?*

13. *Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 - 1$-gyel illetve $x^2 + 1$-gyel?*

14. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x : 2$ maradékos osztás?*

15. *Egy egész együtthatós polinom minden egész helyen páros értéket vesz fel. Igaz-e, hogy a polinom osztható kettővel (mint konstans polinommal)?*

16. *Tegyük fel, hogy f és $g \neq 0$ egész együtthatós polinomok. Igaz-e, hogy g akkor és csak akkor osztója f-nek $\mathbb{Z}[x]$-ben, ha az $f : g$ maradékos osztást $\mathbb{Q}[x]$-ben elvégezve a hányados egész együtthatós, és a maradék nulla?*