Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Negyedik alkalom

1. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor szerinti kifejtéssel, majd (a harmadik determináns kivételével) az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel és a felső háromszög alakra hozás módszerével is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. *Adjuk meg az alábbi permutációk inverziószámát, és előjelét.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

3. *Írjuk fel az általános kétszer kettes, majd a háromszor hármas determináns képletét a determináns definíciója alapján.*

4. *Az* $((a_{ij}))$ *négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele:* $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?

5. *Írjuk fel az 1. feladatban szereplő második mátrix inverzét a ferde kifejtési tétel alapján.*

6. *Igazoljuk, hogy ha egy* $n \times n$*-es mátrixban van egy* $m \times k$*-as téglalap csupa nullákból, és* $m + k > n$*, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* n*-edrendű, komplex elemű determinánsban* a_{ij} *az* a_{ji} *konjugáltja minden* i, j*-re, akkor a determináns értéke valós.*

8. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

9. *Egy* 1999×1999*-es determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.*

10. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

11. *Legyen* A *egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy* A^{-1} *akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha* $\det A$ *értéke* 1 *vagy* -1.

12. *Legyen* $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $X \in \mathbb{C}^{k\times m}$ *és* O *az* $m \times k$*-s nullmátrix. Rakjuk össze az* M *mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen:*

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$$

Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$.