Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Harmadik alkalom

Az $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix *nyoma* $tr(M) = a + d$, *determinánsa* pedig $\det(M) = ad - bc$. Az *egységmátrix* az $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a *nullmátrix* pedig az $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Két mátrixot úgy adunk össze, hogy a megfelelő komponenseket összeadjuk; skalárral mátrixot úgy szorzunk, hogy a mátrix minden komponensét megszorozzuk ezzel a skalárral.

1. *Számítsuk ki az alábbi mátrix-szorzatokat.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Szorozzunk össze két általános, csupa egyesekből álló mátrixot is (amikor lehet). Keressünk olyan kétszer kettes nem nulla mátrixot, melynek négyzete nulla.

2. *Igazoljuk, hogy ha M és N kétszer kettes mátrixok, akkor* $\det(MN) = \det(M)\det(N)$.

3. *Végezzük el az*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

szorzást. Fogalmazzuk meg, mely kétszer kettes mátrixoknak van inverze.

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha A^{-1} és B^{-1} léteznek, akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

5. *Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - tr(M)M + \det(M)I = O$.*

6. *Megoldható-e a kétszer kettes valós mátrixok körében az $X^2 = -I$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = I$ egyenlet összes megoldását.*

7. *Bizonyítsuk be, hogy ha A nilpotens (azaz négyzetes, és van olyan m természetes szám, amire $A^m = O$), akkor $(I - A)$-nak létezik inverze.*

8. *Határozzuk meg az $AB - BA$ nyomát. Bizonyítsuk be, hogy $AB - BA = I$ lehetetlen.*

További gyakorló feladatok

9. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = A$ és $BA = B$, akkor mindkét mátrix idempotens (azaz $A^2 = A$, illetve $B^2 = B$).*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha A idempotens, akkor $B = I - A$ is az, és $AB = BA = O$.*

11. *Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor involúció, azaz $A^2 = I$, ha $(I + A)(I - A) = O$.*

12. *Bizonyítsuk be, hogy $n \times n$-es szimmetrikus A és B mátrixokra AB pontosan akkor szimmetrikus, ha $AB = BA$.*

13. *Egy négyzetes mátrix felső (alsó) háromszög mátrix, ha a főátlós alatti (feletti) elemek mindegyike* 0. *(Az a_{ij} elem a fődiagonális alatt van, ha $i > j$, a fődiagonális felett, ha $i < j$.) Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

14. *Az M és N mátrixok* felcserélhetők, *ha $MN = NM$. Határozzuk meg azokat az $n \times n$-es mátrixokat, amelyek minden $n \times n$-es mátrix-szal felcserélhetők.*