Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Második alkalom

1. *Adjuk meg az* $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^6 = 1 + i$, $x^n = -1$ *egyenletek összes megoldását.*

2. *Számítsuk ki* $(1+i)^{1999}$ *értékét. Mivel egyenlő* $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots$ *?*

3. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et. (Ötlet: a binomiális tétel segítségével számítsuk ki* $\cos x + i \sin x$ *hetedik hatványát.)*

4*. *Hozzuk zárt alakra a* $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ *összeget.*

5. *Döntsük el, melyek egységgyökök az alábbi számok közül. Mennyi ezek rendje? Mely* n*-ekre lesznek ezek a számok* n*-edik egységgyökök? És primitív* n*-edik egységgyökök?*

$$1\,, \quad -1\,, \quad i\,, \quad 1+i\,, \quad (1+i)/\sqrt{2}\,, \quad \cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)\,, \quad \cos(336^\circ) + i\sin(336^\circ)\,.$$

6. *Ha* ε *rendje osztható néggyel, mi lesz* $-\varepsilon$ *rendje?*

7. *Ha* ε *primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet* $o(-i\varepsilon)$*?*

8. *Mutassuk meg, hogy ha* $n > 0$ *egész,* $\varepsilon \in \mathbb{C}$*, és* $\varepsilon^n = i$*, akkor* $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$*.*

9. *Mutassuk meg, hogy ha* n *páratlan pozitív egész, akkor a* $2n$*-edik primitív egységgyökök épp az* n*-edik primitív egységgyökök ellentettjei. (Először kis* n *számokra ellenőrizzük).*

10. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

11. *Legyenek* m *és* n *pozitív egészek.*

a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ *és* $x^m = 1$ *egyenleteknek?*

b) Igazoljuk, hogy egy n*-edik és egy* m*-edik egységgyök szorzata* nm*-edik egységgyök.*

c) Mutassuk meg, hogy egy n*-edik és egy* m*-edik primitív egységgyök szorzata akkor és csak akkor* nm*-edik primitív egységgyök, ha* m *és* n *relatív prímek.*

12. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

13. *Határozzuk meg a primitív tizenkettedik egységgyökök összegét és szorzatát.*

Megoldás az I/9. feladatra. Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, $\varepsilon = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$, $\eta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$. A szabályos hatszög felrajzolásából látjuk, hogy $\eta = 1 + \varepsilon$. Ha X jelöli az AB oldalra kifelé rajzolt szabályos háromszög középpontját, akkor az $\overrightarrow{XB}$ vektort 120 fokkal elforgatva az $\overrightarrow{YB}$ adódik, azaz $(B - X)\varepsilon = A - X$, ahonnan

$$X = \frac{A - B\varepsilon}{1 - \varepsilon}\,, \quad \text{és hasonlóan} \quad Y = \frac{B - C\varepsilon}{1 - \varepsilon}\,, \quad Z = \frac{C - A\varepsilon}{1 - \varepsilon}\,.$$

Azt kell belátni, hogy az $\overrightarrow{XY}$ vektort 60°-kal elforgatva az $\overrightarrow{XZ}$-t kapjuk, azaz $(Y - X)\eta = (Z - X)$. A fentieket behelyettesítve és $1 - \varepsilon$-nal szorozva:

$$((B - C\varepsilon) - (A - B\varepsilon))\,\eta = (C - A\varepsilon) - (A - B\varepsilon)\,.$$

Beírva, hogy $\eta = 1 + \varepsilon$, és átrendezve

$$A((-1 - \varepsilon + \varepsilon + 1) + B(1 + \varepsilon + \varepsilon(1 + \varepsilon) - \varepsilon) + C(-\varepsilon(1 + \varepsilon) - 1) = 0\,.$$

Ez pedig teljesül, mert $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ (mint a hatszögről leolvasható), és így A, B és C együtthatója is nulla.