Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév
Tizenegyedik alkalom

1. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek? Ahol a válasz nemleges, ott adjuk meg a vektorrendszer azon elemeit, amelyek kifejezhetők a többi vektor lineáris kombinációjaként.*

a) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi mátrixok oszlopvektorai (ez öt különböző vektorrendszer).*

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben $\{1+i,\ 2+i,\ 3+2i\}$.*

c) *A $\mathbb{C}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben $\{1+i,\ 2+i,\ 3+2i\}$.*

d) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $\{1,x,x^2\}$, $\{x,2x,x^2,x^3\}$, $\{1+x,1+2x,1+3x\}$, $\{1+x,1+x^2,x+x^2\}$ (ez négy különböző vektorrendszer).*

e) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^{3\times 3}$ vektortérben az a) pontban felsorolt öt mátrix.*

f) *Az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények $\mathbb{R}$ feletti vektorterében $\{x,\sin x,\cos x\}$, $\{x,2,10^x,x+1,20^x\}$, $\{\sin x+\cos x,\ 2\sin x+3\cos x,\ \sin x-\cos x\}$.*

g) *A valós számsorozatok $\mathbb{R}$ feletti vektorterében $\{P,N\}$, ahol P a prímszámok sorozata, azaz $P=(2,3,5,7,11,\ldots)$, az N pedig a pozitív egészeké, azaz $N=(1,2,3,\ldots)$.*

2. *Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

a) *Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.*

b) *Az egy vektorból álló rendszer mindig független.*

c) *Ha $\{v_1,v_2,v_3\}$ független, akkor tetszőleges v-re $\{v_1+v,v_2+v,v_3+v\}$ is független.*

d) *Ha $\{v_1,v_2,v_3\}$ független, akkor $\{v_1+v_2,v_2,v_3\}$ is független.*

e) *Ha $\{v_1,v_2,v_3\}$ független, akkor $\{v_1+2v_2,\ 2v_2-v_1,\ v_3+v_2+v_1\}$ is független.*

3. *Tegyük fel, hogy egy vektortér a,b,c,d vektoraira $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a,b,c\}$ független. Határozzuk meg d-t.*

4. *Vektortér-e a $W\subseteq V$ halmaz a V vektortér műveleteire nézve az alábbi esetekben?*

a) *$V=\mathbb{Q}[x]$ a $\mathbb{Q}$ test felett, W a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.*

b) *V a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett, és $W=\{z\mid \mathrm{Re}(z)=0\}$.*

c) *V a komplex számok vektortere $\mathbb{C}$ felett, W ugyanaz, mint az előbb.*

d) *V a valós számok vektortere $\mathbb{R}$ felett, és W a nemnegatív valós számok halmaza.*

e) *V a sík $\mathbb{R}$ felett, W pedig az első és harmadik síknegyed uniója.*

f) *V a valós számsorozatok $\mathbb{R}$ felett, W pedig a periódikus sorozatok.*

g) *V a valós számsorozatok $\mathbb{R}$ felett, W pedig a monoton növő sorozatok.*

h) *V az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények $\mathbb{R}$ felett, W pedig a periódikus függvények.*

i) *V az $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények $\mathbb{R}$ felett, W pedig a felülről korlátos függvények.*

5. *Legyen $V=\{a,b\}$, definiáljuk az „összeadást” úgy, hogy $a+a=a+b=b+a=a$, és $b+b=b$. Definiáljuk továbbá tetszőleges $\lambda\in\mathbb{R}$ és $v\in V$ esetén λv-t v-nek. Mely vektortéraxiómák teljesülnek? Igaz-e, hogy $(-1)v$ ellentettje v-nek minden $v\in V$-re? Az általános vektorterekben érvényes $(-1)v=-v$ összefüggés bizonyításában hol használtuk ki, hogy V-ben létezik ellentett?*