Alkalmazott matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizedik alkalom

1. *Deriváljuk az x^3+x^2-x-1 polinomot, állapítsuk meg az euklideszi algoritmussal a deriváltjával vett legnagyobb közös osztóját, és a többszörös gyökeit.*

2. *Lehet-e az x^n+bx^k+1 polinomnak ($n>k>0$, $b\in\mathbb{C}$) háromszoros gyöke?*

3. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2\,x-3\,y+\ 6\,z&=14\\ -3\,x\qquad+\ 2\,z&=\ 3\\ x-6\,y+14\,z&=31 \end{aligned}$$

HF:
$$\begin{aligned} x-\ y+\ z+\ \ t&=2\\ -3\,x\qquad\quad+3\,t&=0\\ -2\,x-\ y+\ z+4\,t&=2\\ 4\,x-\ y+\ z-2\,t&=2 \end{aligned}$$

4. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t=\infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

Homogén	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$n<m$			
$n=m$			
$n>m$			

5. *Van-e olyan egész együtthatós lineáris egyenletrendszer, ami $\mathbb{Q}$ felett ellentmondásos, $\mathbb{Z}_2$ felett egynél több megoldása van, és $\mathbb{Z}_3$ felett pontosan 1?*

6. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

7. *Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?*

8. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n-1$ összege 1999. Melyek ezek a számok? HF: adott $a\neq b$ számok esetén oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} a\,x_1+a\,x_2+\ldots+a\,x_{n-1}+b\,x_n&=1\\ a\,x_1+a\,x_2+\ldots+b\,x_{n-1}+a\,x_n&=2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ b\,x_1+a\,x_2+\ldots+a\,x_{n-1}+a\,x_n&=n \end{aligned}$$

9*. *Egy n-szög csúcsaira számokat akarunk úgy írni, hogy bármelyik csúcsból induljunk is el a sokszög mentén, a sorra következő m szám összege 1 legyen. Mely m és n értékek esetén lehetséges ez úgy, hogy valamelyik csúcsra $1/m$-től különböző szám kerüljön?*

10. *Határozzuk meg az $x^6+x^5+5x^4+4x^3+8x^2+4x+4$ polinom többszörös gyökeit a formális deriválás módszerével.*

11*. *Az n-edfokú $f\in\mathbb{C}[x]$ polinomnak nincs többszörös gyöke. Lehet-e legalább n-szeres gyöke az $[f']^2-ff''$ polinomnak?*