Matematikus gyakorlat, első évfolyam első félév

Első alkalom

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket:* $(1+i)(3-2i)$, $1/i$, $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$.

2. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.*

a) $x^2+2x+2=0$.

b) $x^2+2ix-1=0$.

3. *Határozzuk meg azokat a* $c+di$ *számokat, melyek négyzete* $20i-21$. *Oldjuk meg az* $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ *egyenletet.*

4. *Hol a hiba a következő levezetésben?*

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$$

5. *Rajzoljuk le az alábbi halmazokat a komplex számsíkon.*

$$\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z+i)>1\},\quad \{z\in\mathbb{C}:|z|=iz\},\quad \{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{z}=\overline{z}\},\quad \{z\in\mathbb{C}:|z-i|\le 3\}$$

$$\{z\in\mathbb{C}:|z-i-1|=|z+2|\},\quad \{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1}=0\},\quad \{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\frac{z-1}{z+1}=0\}$$

6. *Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:* $1+i$, $1-i$, $\sqrt{3}+i$, $-1-\sqrt{3}i$.

7. *Oldjuk meg az* $x^3=1$ *és az* $x^4=-4$ *egyenleteket a komplex számok között.*

8. *Legyenek* z *és* w *különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.*

9. *Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.*

10****.** *Tekintsük az*

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad ad-bc\neq 0,\quad a,b,c,d\in\mathbb{C}$$

leképezést a komplex síkon. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor képzi a $\{z:|z|<1\}$ *halmazt (az egységkör belsejét) önmagára, ha a következő alakban írható:*

$$f(z)=k\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\qquad |k|=1,\quad |\alpha|<1,\quad k,\alpha\in\mathbb{C}.$$

Gyakorló feladatok

11. *Melyik természetes számmal egyenlő* $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$?

12. *Hozzuk ki az* $x^3-21x+20=0$ *egyenlet összes (valós) megoldását a Cardano-képletből.*

13. *Számítsuk ki az* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ *egyenlet esetében azokat a* w *értékeket, melyekre az* $x\to x+w$ *helyettesítés eltünteti az* x *illetve az* x^2 *együtthatóját.*

14. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.*