Mat-tanári szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi — megoldási útmutató

1. A polinom a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis, és ezért nincs többszörös gyöke. (Természetesen az is jó megoldás, ha valaki az euklideszi algoritmussal, vagy más módszerrel kiszámolja, hogy a polinomnak és a deriváltjának nincs közös gyöke.)

2. A szokásos rekurzióval, felhasználva, hogy $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$,

$$\Phi_{15}(x) = \frac{x^{15}-1}{\Phi_1(x)\Phi_3(x)\Phi_5(x)} = \frac{x^{15}-1}{(x^5-1)\Phi_3(x)} = \frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

A gyökök és együtthatók összefüggése szerint tehát a primitív tizenötödik egységgyökök összege az x^7 együtthatójának ellentettje, azaz $+1$.

3. Például $3x^3 + 6x + 3$. Ez nem primitív, tehát $\mathbb{Z}$ felett nem felbonthatatlan; a racionális gyökteszt szerint nincs racionális gyöke (persze mielőtt alkalmaznánk a gyöktesztet, célszerű leosztani hárommal), és így, mivel harmadfokú, irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett; végül modulo 2 véve $x^3 + 1$ adódik, ami reducibilis, hiszen gyöke az 1. (Csak az kaphat pontot, aki mindhárom feltételnek eleget tevő polinomot ad meg, a pontszám ebben az esetben az indoklás minőségétől függ.)

4. Igen, a polinom primitív (1 pont), és ha x helyére $x + 1$-et írunk, akkor a polinom 7-re kielégíti a Schönemann-Eisenstein feltételét. Valóban, az $(x + 1)^7$-ben a tanult állítás szerint minden együttható osztható héttel, kivéve a főegyütthatót és a konstans tagot, ezek értéke 1. Ezen a $7(x + 1)$ hozzáadása sem változtat, csak a konstans tagból 8 lesz. Tehát a konstans tag végülis $8 + 6 = 14$, ami héttel osztható, de 49-cel nem.

5. A $p(x) = x^4 + 2x^2 + 4$ gyökeit meghatározandó kapjuk, hogy $x^2 = -1 \pm \sqrt{3}i$, és ebből a komplex számoknál tanult módszerrel négyzetgyököt vonva $x = (\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i)/2$ adódik. A konjugált gyököket összepárosítva kapjuk a valós feletti $p(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + \sqrt{2}x + 2)$ felbontást (4 pont). Így p-nek valós gyöke sincs, és ezért $\mathbb{Q}$ felett is csak két másodfokú szorzata lehetne (1 pont). E másodfokú tényezők gyökei is konjugáltak, és ezért ezek a tényezők csak az $x^2 \pm \sqrt{2}x + 2$ $\mathbb{R}[x]$-beli asszociáltjai lehetnek, ami azonban soha nem lesz racionális együtthatós (1 pont; az utolsó részben a gyökök helyett az $\mathbb{R}[x]$-beli alaptétel egyértelműségi állítására is hivatkozhatunk, asszociáltság helyett pedig egyenlőségről beszélhetünk, ha normált polinomokkal dolgozunk).

6. Az $r(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ polinomról a gyökök és együtthatók összfüggéséből leolvashatjuk, hogy $a + b + c = \sigma_1 = -2$, $ab + ac + bc = \sigma_2 = 2$ és $abc = \sigma_3 = -2$ (1 pont). Ezért $a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$ (1 pont). Ekkor viszont a keresett polinom gyökei valójában a $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ számok, vagyis ez a polinom $(x + a^2)(x + b^2)(x + c^2)$ (2 pont). Mivel $a^2b^2c^2 = \sigma_3^2$ és $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$, a keresett polinom az $x^3 - 4x + 4$ (2 pont).