Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Második zárthelyi

A feladatokat **külön lapra** írjuk, és minden lapon legyen rajta **olvashatóan** a szerző és a gyakvezér neve. Az összesen $36+\infty$ pontból 30 biztosan elég a jeleshez, 12 az elégségeshez, feltéve ha van lényegében megoldott feladat (azaz amelyik legalább 5 pontot kapott). Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont.

1. *(6 pont) Keressük meg a $6+3i$ és a 10 Gauss-egészek* **összes** *kitüntetett közös osztóját, és ezek egyikét állítsuk elő $\alpha\cdot(6+3i)+\beta\cdot 10$ alakban, ahol α és β Gauss-egészek.*

2. *(6 pont) Igazoljuk, hogy a 2 primitív gyök mod 13, vezessük vissza az $x^{100}\equiv 3\ (13)$ kongruenciát lineáris kongruenciára, majd adjuk meg az összes megoldását.*

3. *(6 pont) Oldjuk meg a $\varphi(2x)=x-1$ egyenletet a pozitív egész számok körében.*

4. *(6 pont) Mely b egészekre igaz, hogy $363 \mid b^{112}-b^2$?*

5. *(2+4 pont) Legyenek $a\neq 0$ egész, és $n,m>1$ egészek, melyekre $(a,m)=1$ és $n\mid m$.*

a) *Igazoljuk, hogy $o_n(a)\mid o_m(a)$.*

b) *Mely a és n értékek esetén igaz, hogy $o_n(a)=o_k(a)$ teljesül az n mindegyik olyan $k>0$ többszörösére, amely a-hoz relatív prím?*

6. *(6 pont) Legyen p egy $4k+1$ alakú (pozitív egész) prímszám. Előáll-e $5p$ két relatív prím négyzetszám összegeként? A feladat (bebizonyított) általánosításáért pluszpont jár.*