Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Kilencedik alkalom

Az α Gauss-egész normája az $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ nemnegatív egész szám. A norma multiplikatív, vagyis $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ teljesül minden $\alpha, \beta \in \mathbb{G}$-re. Ha szükség van a megkülönböztetésre, akkor $|_{\mathbb{Z}}$ az egész számok közötti, $|_{\mathbb{G}}$ pedig a Gauss-egészek közötti oszthatóságot jelöl. Az α Gauss-egészt a $\beta \neq 0$ Gauss-egésszel úgy oszthatjuk el maradékosan, hogy megkeressük az α/β komplex számhoz a legközelebbi Gauss-egészt, ez lesz a hányados. Gyakorlatilag, ha $\alpha/\beta = r + si$, ahol r és s racionális számok, akkor legyen a az r-hez, b az s-hez legközelebbi egész szám, $\gamma = a + bi$, $\delta = \alpha - \beta\gamma$. Ezek a számok kielégítik a maradékos osztás feltételeit. A $4k - 1$ alakú pozitív $\mathbb{Z}$-beli prímek a Gauss-egészek gyűrűjében is prímek. A $4k + 1$ alakú pozitív $\mathbb{Z}$-beli prímek felbomlanak két egymással nem asszociált Gauss-prím szorzatára, melyek egymás konjugáltjai. Végül Gauss-prím még az $1 + i$. Ezzel asszociáltság erejéig az összes Gauss-prímet felsoroltuk.

1. *Az alábbi állításokról vizsgáljuk meg, igazak-e a Gauss-egészek gyűrűjében.*
- a) $2 + 3i \mid 7i - 4$.
- b) $3 + 4i$ *és* $4 - 3i$ *asszociáltak.*

2. *Határozzuk meg a* $2 + 11i$ *és* $13 + 4i$ *összes kitüntetett közös osztóját a Gauss-egészek között az euklideszi algoritmussal, és ezek egyikét állítsuk elő az algoritmus alapján* $ax + by$ *alakban, ahol* $x, y \in \mathbb{G}$.

3. *Igazoljuk az alábbi állításokat tetszőleges* $\alpha, \beta \in \mathbb{G}$*-re.*
- a) $m, n \in \mathbb{Z}$ *esetén* $m \mid_{\mathbb{Z}} n \iff m \mid_{\mathbb{G}} n$.
- b) $\alpha \mid_{\mathbb{G}} N(\alpha)$, *és ha* $\alpha \mid_{\mathbb{G}} \beta$, *akkor* $N(\alpha) \mid_{\mathbb{Z}} N(\beta)$.
- c) α *akkor és csak akkor egység* $\mathbb{G}$*-ben, ha* $N(\alpha) = 1$.

Mindezek alapján határozzuk meg $\mathbb{G}$ *egységeit.*

4. *Az* $1 + i$, $2 + i$, $3 + 4i$, 2, 3, 5 *számok közül melyek felbonthatatlanok* $\mathbb{G}$*-ben? Igazoljuk, hogy ha* $N(\alpha)$ *felbonthatatlan* $\mathbb{Z}$*-ben, akkor* α *felbonthatatlan* $\mathbb{G}$*-ben.*

5. *Bontsuk fel a* 14, 20, 30 *számokat a Gauss-egészek gyűrűjében az alaptétel szerint.*

6. *Teljes hatodik hatvány-e* $\mathbb{G}$*-ben a* -27*? És a* -8*?*

7. *Oldjuk meg az egész számok körében az* $x^2 + 1 = y^3$ *diofantikus egyenletet az alábbi feladatsor végrehajtásával.*
- a) *Bontsuk fel* $\mathbb{G}$*-ben szorzatra az egyenlet baloldalát.*
- b) *Mutassuk meg, hogy a baloldal két tényezőjének közös prímosztója csak* $1 + i$ *lehet, és ilyenkor* y *páros.*
- c) *Mutassuk meg a 4-gyel való oszthatóságot vizsgálva, hogy* y *nem lehet páros szám.*
- d) *Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{G}$ *mindegyik egysége teljes köb* $\mathbb{G}$*-ben.*
- e) *Mutassuk meg, hogy a baloldal mindkét tényezője teljes köb* $\mathbb{G}$*-ben.*
- f) *Az* $a + bi$ *köbének kiszámításával keressük meg* x *lehetséges értékeit.*

Oldjuk meg hasonlóan az $x^2 + 121 = y^3$ *diofantikus egyenletet is.*

8. *Mely Gauss-egészek asszociáltak a konjugáltjukkal?*

9. *Egyértelmű-e a maradékos osztás* $\mathbb{G}$*-ben?*