Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Hatodik alkalom

Az alábbiakban legyen R kommutatív, nullosztómentes, egységelemes (=szokásos) gyűrű, melyben a szorzás jele egymás mellé írás, 0 a nullelemet, 1 az egységelemet jelöli.

1. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e? Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? A kommutatív gyűrűkben határozzuk meg az egységeket is.*

a) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*
b) *Az $a+bi$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*
c) *Az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*
d) *Az $a+b\sqrt[3]{2}$ alakú számok, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$, a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*
e) *Tetszőleges Abel-csoport, a szorzást úgy definiáljuk, hogy minden szorzat nulla.*
f) *Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése (tehát $Y+Z$ elemei azok, melyek Y és Z közül pontosan egyben vannak benne), a szorzás pedig a metszetképzés.*

2. *Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a+b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok egység van.*

3. *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.*

a) *Ha $\circ$ kétváltozós művelet egy A halmazon, akkor csak egy neutrális eleme lehet.*
b) *Ha e neutrális elem a $\circ$ kétváltozós asszociatív műveletre nézve, akkor minden elemnek legfeljebb egy (kétoldali) inverze lehet (e-re nézve).*
c) *Ha S gyűrű, és 0 az összeadás neutrális eleme (azaz S nulleleme), akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $s * 0 = 0 * s = 0$.*
d) *Egy egységelemes gyűrű invertálható elemei a szorzásra nézve csoportot alkotnak.*

4. *Mutassuk meg, hogy az $R[x]$ polinomgyűrű egységei azok az r konstans polinomok, ahol r egység R-ben. Határozzuk meg ennek alapján $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_m[x]$ egységeit. Mutassuk meg, hogy az $R[x]$-ben akkor és csak akkor felbonthatatlan minden elsőfokú polinom, ha R test.*

5. *Mely m-ekre van $\mathbb{Z}_m[x]$-ben olyan polinom, amelynek több gyöke van, mint a foka?*

Gyakorló feladatok

6. *Igazoljuk R-ben az alábbi állításokat.*

a) *Az oszthatóság tranzitív.*
b) *A nullelem csak önmagának osztója, de minden elemnek többese.*
c) *Két elem akkor és csak akkor asszociált, ha egymás egységszeresei.*

7. *Végezzük el $\mathbb{Z}_{17}$-ben a $2/3$ és az $5/12$ osztásokat.*

8. *Mutassuk meg, hogy a mod m maradékképzés $\mathbb{Z}[x]$-ből $\mathbb{Z}_m[x]$-be művelettartó. Vezessük le ebből, hogy $\mathbb{Z}_m$ gyűrű.*

9. *Adjunk a Schönemann-Eisenstein-tételre új bizonyítást a polinom mod p vizsgálatával.*

10. *Legyen $\circ$ asszociatív művelet az A halmazon, és $a, b, c, d, e \in A$.*

a) *Mutassuk meg, hogy $[(a \circ b) \circ (c \circ d)] \circ e = a \circ [\{(b \circ c) \circ d\} \circ e]$.*
b)* *Mutassuk meg, hogy tetszőleges szorzat értéke független a zárójelezéstől.*