Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Ötödik alkalom

1. *Írjuk fel az összes másodfokú polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett. Melyek lesznek irreducibilisek? Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.*

2. *A $6x^4 - 9x + 1$ polinomot modulo 3 vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

3. *Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, p egy prímszám, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*
a) *Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett.*
b) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.*
c) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*
d) *Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ felett, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*
e) *Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ felett k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.*
f) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.*

4. *Határozzuk meg az $x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$ polinom többszörös gyökeit a formális deriválás módszerével.*

5. *Lehet-e egy irreducibilis polinomnak többszörös gyöke $\mathbb{Q}$ illetve $\mathbb{Z}_2$ felett?*

6. *Mutassuk meg tetszőleges test felett, hogy ha az f polinomnak van többszörös tényezője (azaz g^2 alakú osztója, ahol g nem konstans polinom) akkor $(f, f') \neq 1$. Mely p prímekre igaz, hogy $x^n - 1$-nek van többszörös tényezője $\mathbb{Z}_p$ felett?*

7. *Adjunk meg egy olyan polinomot egy alkalmas test felett, melynek van olyan nyolcszoros u gyöke, hogy u a polinom deriváltjának is (pontosan) nyolcszoros gyöke. Igaz-e tetszőleges test felett, hogy ha egy elem egy polinomnak egyszeres gyöke, akkor a deriváltjának biztosan nem gyöke?*

Gyakorló feladatok a zárthelyihez

8. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*
a) *$\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R}$ felett $x^7 + x + 1$, $x^2 - 2$, $x^2 + x + 1$.*
b) *$\mathbb{Q}$ felett $3x^7 - x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16} + 1$, $x^{16} + 2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^5 + 4$.*
c) *$\mathbb{Z}$ felett $x^4 + 2x + 27$, $3x^7 + 6x - 18$, $x^6 + 1$, $x^3 + 7x - 3$, $x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$.*
d) *$\mathbb{Z}_2$ felett $x^8 + x^2 + 1$, $x^5 + x + 1$, $x^5 + x^4 + x^3 + 1$, $x^5 + x^3 + 1$.*
e) *$\mathbb{Z}_{17}$ felett $x^2 + 1$, $x^4 + 1$, $x^8 + 1$, $x^{17} + 1$, $x^{17} + 2$.*

9. *Mely polinom gyökei lesznek az $x^5 - 3x^4 + 5$ gyökeinek reciprokai?*

10. *Mely $b \in \mathbb{C}$ értékekre létezik az $x^n + bx^k + 1$ polinomnak háromszoros gyöke?*

11. *Határozzuk meg rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik* **primitív** *egységgyökök összegét és szorzatát. Általánosítsuk a feladatot! (Használjunk körosztási polinomokat!)*

12. *Legyen $\varepsilon = \cos 22.5° + i \sin 22.5°$. Gyöke-e ε az $x^{10} + 3x - 4$ polinomnak?*

13. *Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{(n/m)})$. Számítsuk ki a $\Phi_n(x)$ polinomokat, ha $n = 36, 72, 144, 100$.*