Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Negyedik alkalom

Módszerek az irreducibilitás eldöntésére $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Z}$ felett:

- Egy nem konstans polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és primitív.
- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha nincs racionális gyöke (használjuk a racionális gyöktesztet).
- Bontsuk fel a polinomot $\mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ felett, és használjuk a felbontás egyértelműségét.
- A Schönemann-Eisenstein kritérium.
- f akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in \mathbb{Q}$) az.
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám (ld. köv. feladatsor).

Legyen $n \geq 1$ és $\Phi_n(x) = (x-\xi_1)\dots(x-\xi_k)$, ahol $\xi_1, \dots, \xi_k$ az összes primitív n-edik egységgyök (ez az úgynevezett *n-edik körosztási polinom*). Ekkor $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$, mert

$$\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1\,.$$

1. *Bontsuk $\mathbb{Z}$ felett felbonthatatlanok szorzatára a $30x^2+24$ és $10x^2+15x+6$ polinomokat.*

2. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium: $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ ($n=$?).*

3. *Ellenőrizzük a fenti rekurziós képletet $n=12$-re, és számítsuk is ki Φ_{12}-t, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat. Számítsuk a $\Phi_p(x+1)$ polinomot is, ahol p prímszám, és vizsgáljuk meg, alkalmazható-e rá a Schönemann-Eisenstein kritérium.*

4. *Mutassuk meg, hogy ha $n>1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ (vö. I/XI/14).*

5. *Irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett x^4+1, x^4+2, $2x^4+2x^2+1$, x^3+9, $x^6-10x+10$, $x^4+x^3+x^2+1$?*

Az elméleti anyag megértését segítő feladatok

6. *Ha adott egy p prímszám, akkor nevezzünk egy egész együtthatós polinomot* pirosnak, *ha a főegyütthatója nem osztható p-vel, de a többi együtthatója igen. Mutassuk meg, hogy ha fg piros, akkor f és g is piros. Keressük meg az alábbi bizonyítások közös vonásait: az előző mondatbeli állítás bizonyítása, a Schönemann-Eisenstein bizonyítása, a Gauss-lemma előadáson elhangzott, illetve a Fuchs: Bevezetés VIII/27. Tétel-beli bizonyítása.*

7. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy konstans polinom akkor és csak akkor felbonthatatlan, ha a megfelelő konstans $\mathbb{Z}$-ben az.*

8. *Fogalmazzuk meg precízen, és bizonyítsuk is be, milyen értelemben egyértelmű egy egész együtthatós polinom felbontása egy egész szám és egy primitív polinom szorzatára. Mennyiben egyértelmű egy racionális együtthatós polinom felbontása egy racionális szám, és egy (egész együtthatós) primitív polinom szorzatára?*

9. *Egy egész együtthatós polinomnak ismerjük az alaptétel szerinti (egyik) felbontását $\mathbb{Q}$ felett. Hogyan kaphatunk ebből a $\mathbb{Z}[x]$-beli alaptétel szerinti felbontást?*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbb{Q}$, és $a \neq 0$, akkor tetszőleges $f \in \mathbb{Q}[x]$ akkor és akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha $f(ax+b)$ az. Igaz-e a megfelelő állítás $\mathbb{R}$ felett?*