Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Harmadik alkalom

1. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele. Határozzuk meg a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ feletti polinomok körében az egységeket.*

2. *Bontsuk fel a $6(x^2-2)(x^2+1)$ polinomot $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ felett felbonthatatlanok szorzatára.*

3. *Adjuk meg a $2x^3+3x+5$ polinom racionális gyökeit, és döntsük el, felbonthatatlan-e ez a polinom $\mathbb{Q}$ felett.*

4. *Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az x^4+x+1 polinom?*

5. *Bontsuk fel az x^4-10x^2+1 polinomot $\mathbb{R}$ felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ feletti felbontást is.*

6. *Állapítsuk meg az $f(x)=3x^3+6x^2+6x+3$ és a $g(x)=2x^4+2x^2+2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a szokásos visszahelyettesítési eljárással) $fp+gq$ alakban, ahol p és q alkalmas polinomok. Függ-e az eredmény attól, hogy ezeket a polinomokat $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{Q}$ felett tekintjük-e?*

7. *Állapítsuk meg a második és az ötödik feladatban szereplő két polinom kitüntetett közös osztóját és kitüntetett közös többszörösét.*

8*. *Mutassuk meg, hogy x^n-2 minden $n\geq 1$ esetén felbonthatatlan $\mathbb{Q}$ felett.*

Gyakorló feladatok

Főfeladat. *Vizsgáljuk meg, hogy az előző félévi III/1,2,3,4,5,7,9, IV/10,12, V/1,2 feladatok megfelelői igazak maradnak-e $T[x]$-ben is, ahol T a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ egyike. Ellenőrizzük, hogy az előadáson említett, polinomokra vonatkozó állítások tényleg a $\mathbb{Z}$-beli állításokkal azonos módon bizonyíthatók-e, és ahol szükséges, végezzük el a megfelelő módosításokat.*

10. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ felett bármely két polinomnak egyetlen normált kitüntetett közös osztója van, kivéve ha mindkettő a nullapolinom. Igaz-e ez az állítás $\mathbb{Z}$ felett is?*

11. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{Q}$ felett minden elsőfokú polinom felbonthatatlan, és hogy az $ax+b\in\mathbb{Z}[x]$ elsőfokú polinom akkor és csak akkor felbonthatatlan $\mathbb{Z}$ felett, ha $(a,b)=1$. Mely konstans polinomok lesznek felbonthatatlanok $\mathbb{Z}[x]$-ben?*

12. *Bontsuk fel az x^4+9, az $x^4+x^3+x^2+x+1$ és az x^4-x^2+1 polinomokat $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ felett felbonthatatlanok szorzatára.*

13. *Asszociáltság erejéig hány osztója van $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ felett a második feladatban szereplő polinomnak? (Fel szabad használni, hogy $\mathbb{Z}[x]$-ben igaz az alaptétel.) Hogyan lehet a $\mathbb{Z}$-beli $d(n)$ képletét általánosítani polinomokra?*

14. *Igaz-e, hogy két racionális együtthatós polinomnak akkor és csak akkor van közös komplex gyöke, ha a $\mathbb{Q}$ feletti kitüntetett közös osztójuk nem konstans?*

15. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x:2$ maradékos osztás? Melyek azok az egész együtthatós polinomok, amelyekkel mindig lehet $\mathbb{Z}[x]$-ben maradékosan osztani?*