Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Második alkalom

Egy n-edfokú komplex együtthatós polinomnak legfeljebb n gyöke lehet $\mathbb{C}$-ben. Ezért ha két legfeljebb n-edfokú polinom legalább $n+1$ helyen megegyezik, akkor a két polinom (együtthatóról együtthatóra) egyenlő (ez a polinomok azonossági tétele $\mathbb{C}$ felett). Egy $\alpha \in \mathbb{C}$ szám az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak *k-szoros gyöke,* ha van olyan $g \in \mathbb{C}[x]$ polinom, hogy $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$ és $g(\alpha) \neq 0$.

1. *Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.*

2. *Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú komplex együtthatós polinom n (komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

3. *Legyenek $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ az összes n-edik egységgyökök.*
- a) *Bontsuk gyöktényezős alakra az $x^4 - 1$ polinomot.*
- b) *Bizonyítsuk be, hogy $x^n - 1 = (x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_n)$.*
- c) *A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát. Vessük össze az eredményt és a megoldási módszert az előző félévbeli X/3 feladatéval.*
- d) *Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

4. *Hányszoros gyöke az $x^4 - x^3 - x + 1$ polinomnak az 1?*

5. *Legyen $f \in \mathbb{Q}[x]$ olyan n-edfokú polinom, melynek i hatszoros gyöke. Lehet-e $n = 10$? Adjuk meg az összes ilyen polinomot, melynek foka 12.*

6. *Mutassuk meg, hogy ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor α és $\overline{\alpha}$ ugyanannyiszoros gyöke f-nek. Igazoljuk, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke.*

7. *Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

8*. *Legyen f valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy f előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*

Gyakorló feladatok

9. *Végezzünk maradékos osztásokat véletlenszerűen felírt polinomokkal, amíg az eljárás nem megy flottul. Oldjuk meg az I/9. feladatot.*

10. *Vezessük le a gyöktényező kiemelhetőségéről szóló állítást a maradékos osztás tételéből.*

11. *Milyen kapcsolat van két olyan n-edfokú komplex együtthatós polinom között, amelyeknek ugyanaz az n (különböző) komplex szám a gyöke?*

12. *Írjuk fel az $x^n + 1$, az $x^2 - x + 1$ és az $x^4 - x^2 + 1$ polinomokat gyöktényezős alakban. Ez utóbbi két polinomnak a gyökei honnan ismerősek?*

13. *Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 + 1$-gyel illetve $x^2 - 1$-gyel?*