Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév
Tizedik alkalom

Legyen az n pozitív egész szám $\mathbb{Z}$-beli kanonikus alakja $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_t^{\beta_t}$, ahol a p_j prímek $4k+1$, a q_j-k pedig $4k-1$ alakúak. Az n szám pontosan akkor áll elő két ($\mathbb{Z}$-beli) négyzetszám összegeként, ha mindegyik β_j páros, ebben az esetben az előállítások száma $4(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$. Itt a negatív megoldások, és a sorrend is külön számítanak, például az 5 egyetlen $1+4$ felbontásából az $x^2+y^2=5$ egyenletnek nyolc megoldását kapjuk: $(x,y) = (1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$.

1. *Határozzuk meg, hányféleképpen bonthatók az alábbi számok két négyzetszám összegére. Határozzuk meg a lényegesen különböző felbontások számát is (azaz amikor a sorrendtől és előjelektől eltekintünk): 45, 60, 90, 180, 900. A tapasztalatok alapján adjunk képletet általában is a lényegesen különböző előállítások számára.*

2. *Van-e olyan pozitív prímszám, amely két lényegesen különböző módon előáll két négyzetszám összegeként?*

3. *Van-e végtelen sok pozitív $\mathbb{Z}$-beli prímszám, amely nem áll elő három (nemnegatív) négyzetszám összegeként?*

4. *Igazoljuk, hogy végtelen sok egész szám van, amely nem áll elő nyolc darab hatodik hatvány összegeként.*

5. *Adjunk meg végtelen sok pozitív egész számot, ami nem áll elő 16-nál kevesebb negyedik hatvány összegeként.*

6. *Igaz-e a négy négyzetszám tétel a Gauss-egészek gyűrűjében? Azaz előáll-e minden Gauss-egész egy alkalmas asszociáltja négy Gauss-egész négyzetének összegeként?*

Legyen d olyan egész szám, ami nem egy egész szám négyzete, és jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ az $a+b\sqrt{d}$ alakú (komplex) számok halmazát, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Tehát a $d=-1$ esetben a Gauss-egészeket kapjuk. Az $\alpha = a+b\sqrt{d}$ elem $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$*-beli konjugáltja* definíció szerint $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{d}$ (ha d negatív, ez a komplex konjugálttal egyenlő, de általában nem), $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$*-beli normája* pedig $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a^2 - db^2$.

7. *Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Igazoljuk az alábbiakat.*
- a) $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$; $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$; $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.
- b) $\alpha \mid N(\alpha)$ *és ha* $\alpha \mid \beta$, *akkor* $N(\alpha) \mid N(\beta)$.
- c) α *akkor és csak akkor egység, ha* $N(\alpha) = \pm 1$.
- d) *Ha* $N(\alpha)$ *felbonthatatlan* $\mathbb{Z}$*-ben, akkor* α *felbonthatatlan* $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$*-ben.*

8. *Az alábbi állításokról vizsgáljuk meg, igazak-e a $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ gyűrűben.*
- a) 2, 3, $1 \pm \sqrt{-5}$ *felbonthatatlan.*
- b) *Érvényes a számelmélet alaptétele.*

9*. *Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ euklideszi gyűrű a $\varphi(a+b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$ függvényre nézve.*

FORDÍTS!

10*. *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ euklideszi gyűrű a normára nézve. Oldjuk meg az egész számok körében az $x^2+2=y^3$ diofantikus egyenletet.*

11. *Van-e végtelen sok, páronként nem asszociált prím a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gyűrűben? [Ötlet: vizsgáljuk a $\mathbb{Z}$-beli prímeket modulo 8.]*

A kvaterniók szorzását a következőképpen lehet megjegyezni. Az $\{i,j,k\}$ ciklikus sorrendben előrefelé haladva bármely két szomszédos elem szorzata a harmadik, visszafelé haladva bármely két szomszédos elem szorzata a harmadik ellentettje, és mindegyik elem négyzete -1. Összegeket a disztributív szabály alapján szorozhatunk, annak felhasználásával, hogy a valós számok az i, j, k elemekkel felcserélhetők.

12. *Legyen $\alpha=a+bi+cj+dk$ kvaternió $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, és $\overline{\alpha}=a-bi-cj-dk$ az α konjugáltja. Számítsuk ki az α^2 és az $\alpha\cdot\overline{\alpha}$ szorzatokat.*

13. *Igazoljuk, hogy a kvaterniók testében az x^2+1 polinomnak végtelen sok gyöke van. Határozzuk meg az összes gyököt. Oldjuk meg az $x^2-1=0$ egyenletet is.*

14. *Adjuk meg az összes olyan valós együtthatós másodfokú polinomot, amelynek végtelen sok gyöke van a kvaterniók között.*

Gyakorlófeladatok általános gyűrűkről

15. *Mutassuk meg, hogy minden test alaptételes gyűrű.*

16. *Legyen R azoknak a (racionális) törteknek a halmaza, melyek nevezője páratlan.*
- a) *Mutassuk meg, hogy R a szokásos összeadásra és szorzásra nézve gyűrű.*
- b) *Határozzuk meg az egységeket, a felbonthatatlanokat és a prímeket. Hány prím van asszociáltság erejéig (azaz asszociált prímeket nem tekintve különbözőknek)?*
- c) *Vizsgáljuk meg, igaz-e az alaptétel.*
- d) *A kapott tapasztalatok alapján konstruáljunk olyan gyűrűt, melyben igaz az alaptétel, és melyben asszociáltság erejéig pontosan hat darab prím van.*

17*. *Bizonyítsuk be, hogy ha R alaptételes, végtelen elemszámú gyűrű, ami nem test, akkor végtelen sok prím van benne (most az asszociált prímeket is különbözőnek tekintjük).*

18. *Milyen formában működik az osztók számára $\mathbb{Z}$-ben tanult $d(n)$ függvény képlete általános alaptételes gyűrűben? Hány osztója van a 900-nak a Gauss-egészek között, illetve $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-ben?*

19. *Legyen R alaptételes gyűrű. Mutassuk meg, hogy a kitüntetett közös osztó és többszörös létezik, asszociáltság erejéig egyértelmű, és a $\mathbb{Z}$-ben megismert képlettel kapható. Igazoljuk az alábbiakat is, ha $a,b,c,d,m\in R$.*
- a) $(a,b)[a,b]\sim ab$.
- b) *Ha $a\mid d$, $b\mid d$ és a, b relatív prímek, akkor $ab\mid d$.*
- c) $(a,b)c\sim(ac,bc)$.
- d) *Ha $d\mid ab$, és d relatív prím a-hoz, akkor $d\mid b$.*
- e) *Ha $(m,c)\neq 0$ és $ac\equiv bc\ (m)$, akkor $a\equiv b\ (m/(m,c))$. Mit értünk itt az osztás fogalmán?*

20. *Mutassuk meg, hogy minden véges nullosztómentes gyűrű test. Ezt tudva hogyan élesíthető a 17. feladat állítása?*