Mat-tanári gyakorlat, első évfolyam, második félév

Első alkalom

Ha $f(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$, akkor *a gyökök és együtthatók közötti összefüggések* a következők:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \qquad \binom{n}{1} = n \quad \text{tag}$$

$$\sigma_k = x_1 x_2 \dots x_k + \dots \qquad \binom{n}{k} \quad \text{tag}$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n \qquad \binom{n}{n} = 1 \quad \text{tag.}$$

A σ_k úgy keletkezik, hogy az $x_1, \dots, x_n$ közül az összes lehetséges módon kiválasztunk k darabot, a kiválasztott x_i–ket összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*

a) $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$.

b) $(x^2 + ix + 3)(x^2 + i)$.

2. *Írjuk fel az x^4+4 polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

3. *Igazoljuk a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket másod- és harmadfokú polinomokra, majd általában is. Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

4. *Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom (komplex) gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a+b$, $a+c$, $b+c$. (Eredmény: x^3+6x^2+9x-1 illetve $x^3 + 3x - 1$.)*

Nagyon ajánlott gyakorlatok az elméleti anyaghoz

5. *Bizonyítsuk be a polinomok egyenlőségének definíciójából, hogy ha két nem nulla polinom egyenlő, akkor a fokuk is egyenlő, és hogy ha p felírható $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ alakban, akkor* $\operatorname{gr} p = n \iff a_n \neq 0$.

6. *Igazoljuk a polinomok szorzására felírt szummás képletet, és a műveletek alaptulajdonságait. Írjunk fel képletet három polinom szorzatában az általános tag együtthatójára.*

7. *Igazoljuk, hogy ha p, q és $p+q$ nem nulla polinomok, akkor* $\operatorname{gr}(p+q) \le \max(\operatorname{gr} p, \operatorname{gr} q)$. *Mutassunk példát arra, amikor nem áll egyenlőség. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az analóg állítást két polinom különbségének fokáról.*

8. *Igazoljuk, hogy $(p \pm q)^* = p^* \pm q^*$ és $(pq)^* = p^* q^*$. Itt a * polinomfüggvényt, a baloldali jelek polinomok közötti, a jobboldaliak pedig (az analízisben definiált) függvények közötti műveleteket jelölnek.*

9. *Mutassuk meg, hogy egy nem nulla polinom minden gyökének multiplicitása egyértelműen meghatározott, és hogy az összevont gyöktényezős alakban (azaz a kanonikus alakban) szereplő kitevők épp a megfelelő gyökök multiplicitásai.*