A februári előadásokat a következőkkel kezdem:

1. "Formális vektortér". Tetszőleges $\mathcal{B}$ halmaz esetén konstruálhatunk olyan $\mathcal{U}$ vektorteret a $\mathbf{T}$ test felett, amelynek $\mathcal{B}$ egy bázisa. Ennek elemei a $\sum_i c_i \mathbf{b}_i$ alakú elemek; a triviális módon definiált műveletekkel.

Javasolt feladat: Végezzük el a bizonyítást.

2. *Faktortér*: Legyenek $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ vektorterek ($\mathbf{T}$ felett). Tetszőleges $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ esetén legyen $\mathcal{L} = \mathbf{u} + \mathcal{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$, amit "$\mathcal{V}$ szerinti lineáris (rész)halmaz"–nak nevezünk. Adott altér szerinti két lineáris halmaz vagy egyenlő vagy diszjunkt.

Javasolt feladat: 1) $\mathcal{L}$ akkor és csak akkor $\mathcal{V}$ szerinti lineáris halmaz, ha bármely $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{L}$ esetén $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \mathcal{L}$.

2) $\mathcal{L}$ akkor és csak akkor valamely altér szerinti lineáris részhalmaz, ha bármely $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{L}$ esetén $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \in \mathcal{L}$.

3) Ugyanabba a $\mathcal{V}$ szerinti lineáris halmazba tartozás osztályozás, amely a műveletekkel kompatibilis.

Ha $\mathcal{L}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathcal{V}, \mathcal{L}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathcal{V}$ ugyanazon altér szerinti lineáris halmazok, akkor minden $\mathbf{v}_i \in \mathbf{u}_i + \mathcal{V}$ esetén $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathcal{V}$. Továbbá, minden c skalárral $c\mathbf{v}_1 \in c\mathbf{u}_1 + \mathcal{V}$. Ennek következtében a $\mathcal{V}$ altér szerinti lineáris halmazok a $c(\mathbf{u} + \mathcal{V}) = c\mathbf{u}_1 + \mathcal{V}$ és $(\mathbf{u}_1 + \mathcal{V}) + (\mathbf{u}_2 + \mathcal{V}) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathcal{V}$ műveletekre nézve vektorteret alkotnak $\mathbf{T}$ felett; amelyet az $\mathcal{U}$ tér $\mathcal{V}$ szerinti faktorterének nevezünk és $\mathcal{U}/\mathcal{V}$–vel jelölünk.

Javasolt feladat: Bizonyítsuk be, hogy $c\mathcal{L} = \{c\mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathcal{L}\}$ és $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_i \in \mathcal{L}_i\}$.

A faktortérhez hozzátartozik az a $\vartheta : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\mathcal{V}$ *természetes homomorfizmus*, amelyiknél $\vartheta(\mathbf{v}) = \vartheta(\mathbf{v}) + \mathcal{V}$.

Javasolt feladat: ϑ egyértelműen definiált a $\mathbf{v} \in \vartheta(\mathbf{v})$ összefüggéssel.

3. *Homomorfizmus–tétel*: Legyen $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ egy homomorfizmus legyen $\mathcal{V} \subseteq Ker(\varphi)$ és legyen $\vartheta : \mathcal{U} \to \mathcal{U}/\mathcal{V}$ a természetes homomorfizmus. Ekkor létezik pontosan egy olyan $\varphi' : \mathcal{U}/\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, amelyre $\varphi = \varphi'\vartheta$ teljesül. (Diagrammban is, kommutativitás szóval együtt.)

Javasolt feladat: Aki akarja általánosítsa a faktort és a homomorfizmus–tételt tetszőleges függvényekre!

4. *Tenzor szorzat*: A bihomomorfizmusokat ki akarjuk váltani egyetlen rögzített bihomomorfizmussal és valamilyen homomorfizmussal. Van teljesen modern és absztrakt megközelítés, ami csak azt biztosítja, hogy ilyen létezik. Van klasszikus megközelítés bázisokkal és számolással; ahol az a megadási mód, hogy mi történik új bázisban, de nem látható, hogy ez bázisfüggetlen. Itt a kettő közötti definiciót választjuk, amiről majd a másik két lehetőséget is leolvashatjuk.

Egy $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés bilineáris, ha $\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ rögzített $\mathbf{u}$ esetén $\mathbf{v}$–ben és rögzített $\mathbf{v}$ esetén $\mathbf{u}$–ban lineáris. Mint a fenti megadás mutatja, egy $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ alakú függvényről van szó. A bilinearitás szerint például $\mathfrak{f}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) - \mathfrak{f}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - \mathfrak{f}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 0$. Az $\mathfrak{f}$ függvény tehát biztosan 0–ba viszi az $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ elemet; de ilyen elem nem létezik az $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ halmazban. Ez ugyanis nem a két altér direkt szorzata. Ha ez volna, akkor a fenti kifejezés $(0, -\mathbf{v})$ lenne; és így — a bilinearitás többi relecióját is figyelembe véve — $\mathfrak{f}$ minden elemet 0–ba vinne. Márpedig könnyen látható, hogy van olyan bilineáris függvény, amelyik nem ezt teszi. Ezért célszerű a fenti alakú formális összegeket tekinteni; azaz az $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ mint bázis generálta formális vektortérre térni. Házi használatra jelöljük ezt $\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V}$–vel.

Az $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés mindenképpen egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V}$–nek

$\mathcal{W}$–be való lineáris leképezésévé; hiszen $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ az $\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V}$–nek egy bázisa. Jelöljük ezt a kiterjesztést is $\mathfrak{f}$–fel.

Mármost a fenti meggondolás alapján $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ pontosan akkor bilineáris, ha az $\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V}$–nek a következő elemeit 0–ba viszi:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) & \text{és} & (c\mathbf{u}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) - (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) & \text{és} & (\mathbf{u}, c\mathbf{v}) - c(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{array}$$

ahol $c \in \mathbf{T}$, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}$ és $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$.

A (*) alatti kifejezésekkel együtt ezek minden lineáris kombinációjának a képe is 0 kell, hogy legyen. Ezek a lineáris kombinációk egy $\mathcal{L}$ alteret alkotnak. Ennek az altérnek az elemeit linearitásoknak fogjuk nevezni; ezért is jelöltük az alteret $\mathcal{L}$–lel.

Eszerint $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ pontosan akkor hoz létre bilineáris leképezést, ha $\mathcal{L} \leq Ker(\mathfrak{f})$. Most alkalmazhatjuk a homomorfizmus tételt. Jelöljük az $\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V} / \mathcal{L}$ vektorteret $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$–vel és a megfelelő természetes homomorfizmust $\mathfrak{T} : \mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$–vel. Ne felejtsük el, hogy nem csak $\mathfrak{T}$ határozza meg egyértelműen az $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$–re való megszorítását, hanem ez a megszorítás is egyértelműen meghatározza $\mathfrak{T}$–t. A kapott $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ vektorteret az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ — ebben a sorrendben vett — tenzorszorzatának nevezik. Helyesebb az egész $\mathfrak{T} : \mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ konfigurációt érteni tenzorszorzaton; mert nem mindegy, hogy hogyan történik a leképezés.

A tenzorszorzatot jellemző **univerzalitás** az alábbi *kommutatív diagram*mal adható meg ($\mathfrak{t}$ tetszőlegesen adott):

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{U} \times \mathcal{V} \arrow[r, "id"'] \arrow[d, "id"] &)\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V} \arrow[r, "\mathfrak{T}"'] \arrow[d, "id"] & \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \arrow[d, "\exists ! \vartheta"] \\ (\mathcal{U} \times \mathcal{V} \arrow[r, "id"'] &)\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V} \arrow[r, "\mathfrak{t}"'] & \mathcal{W} \end{tikzcd}$$

Az univerzalitás következménye a tenzorszorzatnak a homomorfizmussal együtt való egyértelműsége (az ismert bizonyítás). Az ubiverzalitás az "absztrakt definició", amit a továbbiakban lépten nyomon felhasználunk.

Mivel $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ az $\mathcal{U} \bigcirc \mathcal{V}$ bázisa és $\mathfrak{T}$ szürjektív, ezért $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$–nek a $\mathfrak{T}$–nél vett képe generátorrendszer (de nem bázis!). Az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ elemnek a $\mathfrak{T}$–nél vett $\mathfrak{T}[(\mathbf{u}, \mathbf{v})]$ képét $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ jelöli. Az $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ elemei tehát a $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ alakú elemek lineáris kombinációi. Ezeket a generátor elemeket az $\mathcal{U}$–beli ás $\mathcal{V}$–beli elemek tenzorszorzatának nevezzük. Mivel ezek nem függetlenek, ezért bizonyos lineáris kombinációk megegyeznek. A fellépő azonosságokat pontosan a (*) alatti relácóknak megfelelő azonosságok generálják. Ezek:

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v} & \text{és} & (c\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \\ \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2 & \text{és} & \mathbf{u} \otimes (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \end{array}$$

A (**) alatti azonosságok segítségével a tenzorszorzat minden eleme felírható az $\mathcal{U}$–ban és $\mathcal{V}$–ben rögzített báziselemek tenzorszorzatának lineáris kombinációjaként. Legyenek az $\mathcal{U}$–beli $\mathcal{E}$ bázis elemei az $\mathbf{e}_i$–k és a $\mathcal{V}$–beli $\mathcal{F}$ bázis elemei az $\mathbf{f}_j$–k. Ekkor $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$–nek egy generátorrendszerét adják az $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ alakú elemek. Belátjuk, hogy ezek bázist alkotnak. (Éppen ez a "klasszikus" megadási mód.)

Azt kell csak belátni, hogy a fenti elemek lineárisan függetlenek. Tegyük fel evégett, hogy $\mathbf{w} = \sum_{i,j} c_{i,j}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j = 0$. Belátjuk, hogy bármely p, q esetén $c_{p,q} = 0$. Tekintsük a következő két leképezést: $\mathbf{u} \to \mathbf{e}_p^*(\mathbf{u})$ és $\mathbf{v} \to \mathbf{f}_q^*(\mathbf{v})$. Ezek "szorzata": $\mathfrak{f} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to (\mathbf{e}_p^*(\mathbf{u}))(\mathbf{f}_q^*(\mathbf{v}))$ nyilván bilineáris leképezés $\mathbf{T}$–be. Ez az $(\mathbf{e}_p, \mathbf{f}_q)$ párt 1–be viszi, a többi $(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$ párt pedig 0-ba. (Azokat is, ahol $i = p$ de $j \neq q$, illetve $j = q$ de $i \neq p$!) Létezik tehát egy olyan egyértelmű $\varphi : \mathcal{U}\otimes\mathcal{V} \to \mathbf{T}$, amelyre $\mathfrak{f} = \varphi\mathfrak{T}$. Erre $\varphi(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{f}_q) = \varphi\mathfrak{T}(\mathbf{e}_p, \mathbf{f}_q) = \mathfrak{f}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{f}_q) = 1$ és minden más esetben $\varphi(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) = 0$. Így $0 = \varphi(\mathbf{w}) = c_{p,q}$, mint állítottuk.

Ebből azonnal következik, hogy véges dimenziós vektorterek esetében $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ dimenziója az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ dimenziójának a szorzata.

Javasolt feladat: 1) Mikor lesz $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = 0$?

2) Véges dimenziós vektortereknél $dim(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = dim(Hom(\mathcal{U}, \mathcal{V}))$. Mutassuk meg, hogy ez nem igaz, ha a két vektortér egyike (melyik?) végtelen dimenziós.

3) Definiáljuk a tenzorszorzatot vektorterek helyett kommutatív egységelemes gyűrűk feletti modulusokra.

4) Vizsgáljuk a tenzorszorzatot az előbbi esetre.

A tenzorszorzatra vonatkozó "alapazonosságok":

Az alaptest az "identitás"; $\mathbf{T}\otimes\mathcal{U} \cong \mathcal{U}$ természetes módon, az $1\otimes\mathbf{u} \to \mathbf{u}$ megfeleltetéssel.

A tenzorszorzat kommutatív. Az $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} \times \mathcal{U}$ izomorfizmus "felemelhető" egy $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ izomorfizmussá.

A tenzorszorzat asszociatív! A háromtényezős tenzorszorzat definiciójához két lépés szükséges:

$$(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \times \mathcal{W} \xrightarrow{\mathfrak{T}_1, id} (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \times \mathcal{W} \xrightarrow{\mathfrak{T}_2} (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W},$$

megfelelően értelmezve. Ezután az $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \times \mathcal{W} \to \mathcal{U} \times (\mathcal{V} \times \mathcal{W})$ izomorfizmus felemelhető egy $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$ izomorfizmussá.

5. Tenzor koordinátái. Legyenek $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ a $\mathcal{V}$ vektortér adott bázisai. Az $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ térbeli minden **tenzor** egyértelműen felírható $\mathbf{A} = \sum_{i,j} a_{i,j}\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j$ alakban. Az itt fellépő együtthatókat az $\mathbf{A}$ tenzor adott bázisbeli "koordinátáinak" nevezzük. Világos, hogy ezeket a koordinátákat célszerű mátrixalakban felírni: $[\mathbf{A}]^{i,j} = a_{i,j}$.

Javasolt feladat: 1) Határozzuk meg $[\mathbf{A}]$ elemeit formálisan az $\mathcal{A}^*$ és $\mathcal{B}^*$ duális bázisok segítségével.

2) Legyen $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$ és $\mathcal{F} = \tau(\mathcal{B})$ egy–egy új bázis. Írjuk fel $\mathbf{A}$ mátrixát ebben a bázispárban.

3) Írjuk fel az $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ mátrixát.

4) Melyek azok az $\mathbf{A}$ tenzorok, amelyekre $r([\mathbf{A}]) = 1$?

5) Jellemezzük azokat a tenzorokat, amelyekhez tartozó mátrix rangja r.

6) Tekintsük $\mathcal{U}$–nak $\mathcal{U}^*$–ba való rögzített izomorfizmusát. Tetszőleges $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}) \in \mathcal{U}^* \times \mathcal{V}$ elemhez rendeljük hozzá azt a $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}) : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ homomorfizmust, amelyre $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}) : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{a}^*(\mathbf{u})\mathbf{b}$. Konkluzió??