1. Kvadratikus formák.

α) Ha $x_1,\dots,x_n$ határozatlanok és $c_1,\dots,c_n \in \mathbf{T}$, akkor a $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ polinom neve *homogén lineáris forma.*

β) Ha $x_1,\dots,x_n$ és $y_1,\dots,y_k$ határozatlanok és $c_{i,j} \in \mathbf{T}$, akkor a $\sum_{i=1}^n c_{i,j} x_i y_j$ polinom neve (*homogén*) *bilineáris forma.*

γ) Ha $x_1,\dots,x_n$ határozatlanok és $c_{i,j} \in \mathbf{T}$, akkor a $\sum_{i=1}^n c_{i,j} x_i x_j$ polinom neve *kvadratikus alak, vagy kvadratikus forma.*

Legyen $\mathcal{A} = \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ az $\mathcal{U}$, $\mathcal{B} = \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér egy–egy rögzített bázisa. Legyen ezekben felírva egy–egy "általános" vektor: $\mathbf{u} = \sum x_i \mathbf{u}_i$ és $\mathbf{v} = \sum y_i \mathbf{v}_i$. Mint tudjuk, tetszőleges $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbf{T}$ *homogén lineáris függvény* az α alatti formulával számolható. Hasonlóképpen láttuk azt is, hogy az $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} : \mathbf{T}$ *bilineáris függvény* esetén $\mathfrak{f}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ megadása a β alatti formulával történhet. Ebből azonnal látható, hogy a *kvadratikus függvény* esetében γ szolgáltatja a megfelelő formulát.

Eszerint a "forma" $\to$ "függvény" megfeleltetés egyértelmű. Könnyű belátni, hogy ha $\mathbf{T}$ végtelen, akkor visszafele is egyértelmű a megfeleltetés.

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy ez pontosan végtelen testek esetében igaz.

2) Igaz–e az, hogy véges testek esetében ez a megfeleltetés szürjektív?

Akár a "formákat" akár a függvényeket nézzük, ezek a szokásos műveletekre nézve vektoreret alkotnak. Mint láttuk, minden $\mathfrak{b} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbf{T}$ bilineáris függvény egyértelműen felírható $\mathfrak{b} = \mathfrak{s} + \mathfrak{a}$ alakban, ahol $\mathfrak{s}$ szimmetrikus (tehát $\mathfrak{s}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathfrak{s}(\mathbf{v},\mathbf{u})$) és $\mathfrak{a}$ antiszimmetrikus (tehát $\mathfrak{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\mathfrak{a}(\mathbf{v},\mathbf{u})$); feltéve, hogy $\mathbf{T}$–ben $2 \neq 0$. Világos, hogy minden bilineáris függvény meghatároz egy kvadratikust: a $\mathfrak{Q}(\mathbf{u}) = \mathfrak{b}(\mathbf{u},\mathbf{u})$ összefüggéssel.

Könnyen látható, hogy $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{a}_1$ és $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{a}_2$ pontosan akkor határozzák meg ugyanazt a kvadratikus függvényt, ha $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$. Eszerint a kvadratikus függvények egy–egyértelműen megfeleltethetők a szimmeterikus bilineáris függvényeknek.

Javasolt feladat: 1) Legyen p prímszám és $\mathbf{P}$ a modulo p vett maradékosztályok teste. Legyen továbbá $\mathcal{U}$ véges dimenziós vektortér $\mathbf{P}$ felett. Tekintsük a következő kvadratikus alakokat: x^2, x^2+y^2, $x^2+y^2+u^2$ és $x^2+y^2+u^2+v^2$. Mely primszámok esetén vehetik fel ezek nem–triviális helyettesítés esetén a 0–t? Lehetséges–e ez a racionális, a valós vagy a komplex számtest esetében?

2) Nevezzük az $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ vektorokat a $\mathfrak{Q}$ kvadratikus alakra nézve konjugáltaknak, ha a megfelelő $\mathfrak{s}$ szimmetrikus bilineáris formára $\mathfrak{s}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ igaz. Lehet–e egy vektor önmagának a konjugáltja?

2. Tehetelenségi tétel valós testek felett:

Legyen most a $\mathbf{T}$ test a valósaknak a része, $\mathcal{U}$ (véges dimenziós) vektortér felette és $\mathfrak{Q}(\mathbf{x})$ kvadratikus alak a hozzátartozó $\mathfrak{s}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ szimmetrikus bilineáris függvénnyel.

$\mathfrak{Q}$ *pozitív definit*, ha $\mathbf{x} \neq 0$ esetén $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) > 0$.

$\mathfrak{Q}$ *negatív definit*, ha $-\mathfrak{Q}$ pozitív definit.

$\mathfrak{Q}$ *pozitív szemidefinit*, ha $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) \geq 0$.

$\mathfrak{Q}$ *negatív szemidefinit*, ha $-\mathfrak{Q}$ pozitív szemidefinit.

Minden más esetben $\mathfrak{Q}$ *indefinit.*

$\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ ($\mathfrak{s}$–re nézve) *ortogonálisak*, ha $\mathfrak{s}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ (jelben $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$). A $\mathcal{V},\mathcal{W} \leq \mathcal{U}$ vektorterekre $\mathcal{V} \perp \mathcal{W}$, ha minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és minden $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ esetén $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ esetén $\mathbf{x} \perp \mathcal{V}$, ha minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$. Ha $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{V}^\perp = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \perp \mathcal{V}\}$.

$\mathcal{B} = \mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n \in \mathcal{U}$ *ortogonális rendszer*, ha minden $1 \leq i,j \leq n$ esetén $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$. Ha $\mathfrak{Q}(\mathbf{u}_i) = 1$ is igaz, akkor $\mathcal{B}$ *ortonormált rendszer.* Ha $\mathcal{B}$ egyben bázis, akkor *ortogonális bázis*ról, illetve *ortonormált bázis*ról beszélünk.

Javasolt feladat: 1) Az ortogonalitás szimmetrikus reláció.
2) Az ortogonalitás sem nem reflexiv sem nem tranzitív.
3) $\mathbf{u} \perp \mathcal{V}$ pontosan akkor igaz, ha $\mathbf{u}$ ortogonális $\mathcal{V}$ egy bázisára.

Tétel: $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ esetén $\mathcal{V}^{\perp} \geq \mathcal{W}^{\perp}$. $\mathcal{V}^{\perp\perp} \geq \mathcal{V}$ és $\mathcal{V}^{\perp\perp\perp} = \mathcal{V}$.

Tétel: Ha $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ és $\mathfrak{Q}$ a $\mathcal{V}$–n pozitív definit, akkor $\mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{V} = \{0\}$, ha $\mathcal{V}$ emellett véges dimenziós, akkor $\mathcal{U} = \mathcal{V}^{\perp} + \mathcal{V}$ és $\mathcal{V}$–nek van ortogonális bázisa.

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk az utóbbinak egy erősebb formáját: Ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ egy bázis, akkor van olyan $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ ortogonális bázis, amelyre minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i \rangle$ (Schmidt féle ortogonalizáció.)

Tétel. *Ha $\mathfrak{s}$ szimmetrikus bilineáris függvény az $\mathcal{U}$ téren, akkor $\mathcal{U}$ az $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ páronként ortogonális altereinek a direkt osszege, ahol $\mathfrak{s}$–nek ezekre való megszor1tása rendre pozitív definit, azonosan* 0, *illetve negatív definit.*

Tehetetlenségi tétel SYLVESTER). *A fenti alterek nem feltétlen egyértelműek, de dimenzióik igen.*

Javasolt feladat: 1) Az $\mathbb{R}$ feletti vektorterekben melyek azok a kvadratikus alakok, amelyekre a tehetetlenségi tételben szereplő alterek egyértelműek?
2) Bizonyítsuk be, hogy a fenti $\mathcal{S}$ altér egyértelmű. Melyik jó definiciója: Azok a vektorok, amelyek önmagukra merőlegesek, vagy azok a vektorok, amelyek mindenre merőlegesek?
3) Jó definició–e a definitségre az, hogy a kvadratikus alak csak a 0–ra 0? Miért igen és miért nem?

Tétel. *A kvadratikus alak alkalmas bázisban (együtthatús) négyzetösszeggé válik.*

2. Bilineáris alak mátrixa, áttérés új bázisra. Legyen $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathbf{T}$ egy bilineáris függvény. Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ a $\mathcal{V}$ egy–egy bázisa és $\mathbf{u} = \sum_i a_i \mathbf{a}_i$, $\mathbf{v} = \sum_i b_i \mathbf{b}_i$, akkor a bilinearitás alapján $\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} a_i b_j \mathfrak{f}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)$.

Az összeg tagjaiban a harmadik tényező minden vektorra azonos. Ezeket egy mátrixba rendezhetjük el. $F = [\mathfrak{f}]^{i,j} = [\mathfrak{f}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)]$ az $\mathfrak{f}$ bilineáris alakhoz tartozó mátrix az adott bázisban. Ebből azonnal kaphatjuk, hogy $\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = [\mathbf{u}]^T_{\mathcal{A}} [\mathfrak{f}]^{i,j}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$. Nézzük meg miképpen változik a mátrix, ha áttérünk az $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$ és $\mathcal{F} = \tau(\mathcal{B})$ bázisokra:

$$[\mathfrak{f}]^{i,j}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [\mathbf{e}_i]^T_{\mathcal{A}} [\mathfrak{f}]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} [\mathbf{f}_j]_{\mathcal{B}} = [\sigma(\mathbf{u}_i)]^T_{\mathcal{A}} [\mathfrak{f}]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} [\tau(\mathbf{v}_j)]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{u}_i]^T_{\mathcal{A}} [\sigma]^T_{\mathcal{A}} [\mathfrak{f}]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} [\tau]_{\mathcal{B}} [\mathbf{v}_j]_{\mathcal{B}}.$$

Eszerint $[\mathfrak{f}]^{i,j}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [\sigma]^T_{\mathcal{A}} [\mathfrak{f}]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} [\tau]_{\mathcal{B}}$.

Kvadratikus függvény mátrixán a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris függvény mátrixát értjük. *Javasolt feladat:* 1) Legyen $\mathfrak{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Mi a kapcsolat mátrixaik között?
2) Milyen egy szimmetrikus és egy antiszimmetriks bilineáris függvény mátrixa?
3) Egy bilineáris függvény mátrixából hogyan kapható meg szimmetrikus és antiszimmetrikus összetevőjének a mátrixa?
4) Írjuk fel az $x^2 + 4xy + 6y^2$ kvadratikus alak(hoz tartozó függvény) mátrixát.

3. Euklideszi tér. Rögzítsünk a $\mathbb{R}$ valós test feletti $\mathcal{U}$ n–dimenziós térben egy $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bázist. Az ehhez tartozó *skaláris szorzat*on a következő függvényt értjük (belső szorzatnak is nevezik):

Ha $\quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \quad$ és $\quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n \quad$ akkor $\quad (\mathbf{x}; \mathbf{y}) = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n$.

Ez a függvény nyilván szimmetrikus bilineáris. Egy skaláris szorzat ekvivalens egy rögzített $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ izomorfizmussal: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x})(\mathbf{y})$.

Egy skaláris szorzathoz tartozó kvadratikus alak nyilván pozitív definit. A tehetetlenségi tétel szerint minden pozitív definit bilineáris függvényhez van olyan bázis, amelyben skaláris szorzattá válik.

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy bármely vektor eleme lehet egy megfelelő bázisnak.

2) Milyen más bázis esetén lesz egy skaláris szorzat ismét skaláris szorzat?

3) Mutassuk meg, hogy a racionális számtest esetében nem minden pozitív definit bilineáris függvény válik skaláris szorzattá.

4) Milyen feltételnek kell teljesülnie a $\mathbb{T} \leq \mathbb{R}$ testben ahhoz, hogy a felette vett vektorterekben minden pozitív definit bilineáris függvény skaláris szorzattá válhasson?

5) Mutassuk meg, hogy a valós együtthatós legfeljebb n–edfokú polinomok körében $\int_{-1}^{+1} fg$ pozitív defininit szimmetrikus bilineáris függvény. Keressünk olyan bázist, amelyben skaláris szorzattá válik!

Az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ euklideszi tereket izomorfaknak nevezzük, ha létezik köztük skalárszorzat–tartó vektortér izomorfizmus.

Tétel. *Két euklideszi tér pontosan akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik.*

Javasolt feladat: 1) Mi a feltétele annak, hogy a $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vektortér izomorfizmus euklideszi tér izomorfizmus legyen?

2) Mit tudunk mondani egy $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ euklideszi tér homomorfizmusról?

3) Definiáljuk az euklideszi tereket végtelen dimenziós esetre is.

Euklideszi tér euklideszi altere olyan altér, amelyen az eredeti skalárszorzat skalárszorzattá válhat.

Tétel. *Euklideszi tér minden altere euklideszi altér.*

Tétel. *Az $\mathfrak{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ szimmetrikus bilineáris függvényre akkor és csak akkor teljesül az $\mathfrak{s}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \cdot \mathfrak{s}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \mathfrak{s}(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2$ egyenlőtlenség, ha szemidefinit.*

Tétel. *(Cauchy) Euklideszi térben $(\mathbf{u}; \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}; \mathbf{v}) \geq (\mathbf{u}; \mathbf{v})^2$.*

Javasolt feladat: 1) Mikor lesz az előző két tételben egyenlőség?

2) Írjuk fel az euklideszi térre vonatkozó esetet koordinátákkal.

3) Bizonyítsuk be, hogy $[a, b]$ intervallumban folytonos függvények a szorzatintegrálra euklideszi teret alkotnak. Írjuk fel a Cauchy egyenlőtlenséget.

4) Mi igaz az integrálható függvényekre az előző feladat állításaiból.

Euklideszi térben vektorok hossza, vektorok szöge. Nullvektor, merőlegesség. Háromszög egyenlőtlenség. Két vektor (végpontjának a) távolsága, vektor (végpontjának) altértől való távolsága

Vektorok és alterek merőlegessége. Merőleges kiegészítő, ennek egyértelműsége.

Legyenek $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ vektorterek ($\mathbf{T}$ felett). Tetszőleges $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ esetén legyen $\mathcal{L} = \mathbf{u} + \mathcal{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$, amit "$\mathcal{V}$ szerinti lineáris (rész)halmaz"–nak nevezünk. Adott altér szerinti két lineáris halmaz vagy egyenlő vagy diszjunkt.

Javasolt feladat: 1) $\mathcal{L}$ akkor és csak akkor $\mathcal{V}$ szerinti lineáris halmaz, ha bármely $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{L}$ esetén $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \mathcal{L}$.

2) $\mathcal{L}$ akkor és csak akkor valamely altér szerinti lineáris részhalmaz, ha bármely $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathcal{L}$ esetén $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \in \mathcal{L}$.

3) Ugyanabba a $\mathcal{V}$ szerinti lineáris halmazba tartozás osztályozás, amely a műveletekkel kompatibilis.

4) Legyenek $\mathcal{L}$ és $\mathcal{K}$ lineáris alakzatok az $\mathcal{U}$ euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy az $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ függvénynek az $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$ feltételek mellett létezik minimuma.

5) Definiáljuk lineáris alakzatok távolságát. Igaz–e erre is a háromszög egyenlőtlenség?

6) Definiáljuk vektornak és altérnek a hajlásszögét.

7) Definiáljuk olyan alterek hajlásszögét, amelyeknek csak 0 közös elemük. Miért kell a feltétel?

8) Legyen $\mathcal{U}$ euklideszi tér, $\mathcal{V}, \mathcal{W} \leq \mathcal{U}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{V}^{\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp} = (\mathcal{V} + \mathcal{W})^{\perp}$.

9) Definiáljuk tetszőleges alterek szögét.

4. Euklideszi tér a projektív tér "ellenében". Az euklideszi tér a mi "megszokott terünk". Itt méretes vonatkozásokról beszélhetünk. Ebben vannak megadva például "másodfokú görbék" mint kör elipszis stb. vagy bizonyos felületek, gömb, ellipszoid, hiperboloid stb. Nézzük például a kör általános egyenletét, ami ilyen alakú: $(x-u)^2+(y-v)^2-r^2=0$. Itt a bal oldal x–ben és y–ban másodfokú, de elsőfokú és konstans tagok is szerepelnek. Ezt a kvadratikus alakokkal nem lehet minden további nélkül leírni, mert azok homogének. Ennek a problémának a megoldására vezették be a *homogén koordinátáka*t.

Tetszőleges $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ vektor esetén nézzünk egy $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ k–adfokú polinomot. (Minket a $k=2$ eset érdekel.) Tekintsünk $n+1$ új határozatlant, vektoralakban $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}]^T$. Végezzük el az $x_i = \frac{y_i}{y_{n+1}}$ helyettesítést. Ekkor persze nem kapunk polinomot f–ből, de (y_{n+1}^k)–nal való szorzás után egy $g(\mathbf{y}) = y_{n+1}^k \cdot f(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n+1}})$ homogén k–adfokú polinomot kapunk.

Ebből a polinomból az $y_{n+1} = 1$ majd az $y_i = x_1$ helyettesítéssel visszakapjuk az eredeti $f(\mathbf{x})$ polinomot. Ez az eljárás úgy interpretálható, hogy az eredeti vektorteret beágyazzuk egy 1–gyel nagyobb dimenziósba, illetve annak egy lineáris alakzatába: Azt az alteret, amely vektorainak $(n+1)$–edik koordinátája 0 "eltóljuk" azzal a vektorral, amelunek az utolsó koordinátája 1 és a többi 0. Az eredeti alakzat pontjait a középponttal összekötve a kapott egyeneseken levő ponthalmaz az új alakzat. A megfordítás most már a fenti lináris alakzattal való elmetszést jelenti.

A kapott $(n+1)$–dimenziós tér homogén; a neve *projektív tér*. A projektív térben az $\mathbf{y}$ és $c \cdot \mathbf{y}$ pontok ugyanazt az "eredeti" pontot jellemzik. Ezek halmaza a projektív tér egy–egy pontja. Így a projektív tér pontjai a "nagyobb" tér egyenesei. A projektív térben azonban több pont van: nevezetesen azok, amelyeknek az utolsó koordinátájuk 0. Ezeket az eredeti tér *végtelen távoli pontjai*nak nevezzük.

Javasolt feladat: 1) Definiáljuk a projektív tér egyeneseit. Melyek a végtelen távoli egyenesek?

2) Bizonyítsuk be, hogy a projektív síkon bármely két ponton át pontosan egy egyenes fektethető és bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

3) Írjuk fel az $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ ellipszis, $xy - 1 = 0$ hiperbola és $y - x^2 = 0$ parabola esetében a megfelelő homogén koordinátás alakot. Határozzuk meg a tehetetlenségi tétel szerint ezekhez tartozó háromféle altér dimenzióját! Határozzuk meg ezeknek a végtelen távoli egyenessel való metszéspontjait.

5. Komplex tér. A $\mathbb{C}$ komplex test feletti vektortérben az eddigi értelemben vett kvadratikus alakok definitségéről nem beszélhetünk, mert $\mathfrak{s}(i\mathbf{x}, i\mathbf{x}) = -\mathfrak{s}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ összefüggés miatt minden skalárral (számmal) együtt annak negatívja is fellép. Éppen ezért egy "másik fajta" lineáris leképezést is be kell vezetni.

Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a $\mathbb{C}$ feletti $\mathcal{U}$ vektortér egy bázisa. Feleltessük meg az $\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$ vektornak az $\overline{\mathbf{u}} = \overline{c_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \overline{c_n}\mathbf{u}_n$ vektort. Ez a megfeletetés nyilván lineáris, de nem homogén, mert $\overline{c \cdot \mathbf{u}} = \overline{c} \cdot \overline{\mathbf{u}} \neq c \cdot \overline{\mathbf{u}}$. Ezt a tulajdonságot *másodfajú homogenitás*nak nevezik. Ha másodfajú homogén lineáris leképezések is szerepelnek, akkor az "eddigieket" *elsőfajú*aknak nevezzük. A fenti megfeleltetést nevezhetjük vektortérbeli "konjugálásnak". Ez annyival több az eddig leírtaknál, hogy $\overline{\overline{\mathbf{u}}} = \mathbf{u}$. Erre a tulajdonságra azt mondják, hogy a megfeleltetés *involució*.

Könnyen látható, hogy minden másodfajú homogén lineáris involúcióhoz található olyan bázis, amelyben konjugálás.

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{U}$ n–demenziós tér a $\mathbb{C}$ felett, akkor $2n$–dimenziós az $\mathbb{R}$ felett.

2) Az előbbi feladatnál legyen $\mathbf{u} \to \overline{\mathbf{u}}$ egy másodfajú homogén lineáris involúció, $\mathcal{V} = \{\mathbf{u} + \overline{\mathbf{u}} | \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$ és $\mathcal{W} = \{\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}} | \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$ az $\mathbb{R}$ felett, mindkettő n–dimenziós, $\mathcal{V}$–n a konjugálás az identitás, $\mathcal{W}$–n az identitás negatívja. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{V}$ egy valós bázisa $\mathcal{U}$–nak egy olyan bázisa, amelyen $\mathbf{u} \to \overline{\mathbf{u}}$ konjugálás.

3) Legyen $\chi : \mathbf{u} \to \overline{\mathbf{u}}$ egy konjugálás. Bizonyítsuk be, hogy $\chi \circ \varphi$ akkor és csak akkor másodfajú, ha φ elsőfajú; akkor és csak akkor elsőfajú, he φ másodfajú.

4) Határozzuk meg az elsőfajú homogén lineáris involúciók mátrixát alkalmas bázisban. "Hányféle" ilyen leképezés létezik?

$\mathbb{C}$ feletti $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés *bilineáris*, ha $\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ rögzitett $\mathbf{u}$–ra $\mathbf{v}$–ben elsőfajú és rögzitett $\mathbf{v}$–re $\mathbf{u}$–ban másodfajú.

A komplex esetben a fenti tulajdonság mér helettesíti a szimmetriát: Tetszőleges $\mathfrak{f} : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *bilineáris függvény esetén* $\mathfrak{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *kvadratikus alak.*

A kvadratikus alakhoz tartozó mátrixot itt is hasonlóképpen értelmezhetjük, mint a valós esetben. A függvény kiszámításakor azonban vigyázni kell. Egy $A = [a_{i,j}]$ mátrix *adjungált*ján az $A^* = [\overline{a_{j,i}}]$ mátrixot, azaz a mátrix transzponáltjának a konjugáltját értjük.

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy $(A^*)^* = A$ $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(cA)^* = \overline{c}A^*$ és $(AB)^* = B^*A^*$.

2) Bizonyítsuk be, hogy $(AA^*)^* = AA^*$ és $AA^* = 0$ akkor és csak akkor, ha $A = 0$.

3) Bizonyitsuk be, hogy ha az $A \to A^+$ megfeleltetés rendelkezik a 2) feladatbeli második és az 1) feladatbeli tulajdonságokkal, akkor csak egy alkalmas bázisbeli adjungálás lehet (nehéz).

A bilineáris függvény "furcsa" definiciója miatt azt a hozzátartozó kvadratikus alak egyértelműen meghatározza:

A valós esethez hasonlóan az $\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bilineáris függvényhez tartozó $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a $\mathfrak{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathfrak{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u}))$ függvényt. Ebből viszont az $\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + i\mathfrak{g}(i\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ alapján $\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ kapható.

A definitségről csak akkor van értelme beszélni, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós számokból áll. Ez pontosan akkor igaz, ha a megfelelő bilineáris függvényre $\mathfrak{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \overline{\mathfrak{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$ teljesül. Az ilyen bilineáris függvényt *Hermite–félé*nek nevezik.

Tétel. *Hermite–féle bilineáris függvény alkalmas bázisban négyzetösszeggé válik, és érvényes a tehetetlenségi tétel.*

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathfrak{f}$ bilineáris függvény felírható $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}i$ alakban, ahol mind $\mathfrak{a}$, mind $\mathfrak{b}$ Heremite féle.

6. Komplex euklideszi tér. Legyen $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ az $\mathcal{U}$ komplex euklideszi tér egy bázisa. Az $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n$ és $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$ vektorok fenti bázisban vett skaláris szorzatán az $(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \overline{u_1}v_1 + \cdots + \overline{u_n}v_n$ skalárt értjük.

Tétel. *A skalárszorzat pozitív definite Hermite–féle bilineáris függvény; s ennek megfordítása is igaz.*

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be a fenti tételt.

2) Tetszőleges $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ vektornak feleltessük meg azt a $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}^*$ vektort, amelyre $\mathbf{u}^* : \mathbf{v} \to (\mathbf{u}; \mathbf{v})$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{u} \to \mathbf{u}^*$ másodfajú lineáris leképezés.