1. Direkt összeg. $\mathcal{U}$ az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ altereinek direkt összege (jelben $\mathcal{U} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$), ha minden $\mathbf{u}$ eleme egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ alakban, ahol $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ és $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$.

Tétel. *$\mathcal{U} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ akkor és csak akkor, ha $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \mathcal{U}$ és $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$.*

Javasolt feladat: 1) Legyen $\mathcal{U} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha : \mathbf{u} \to \mathbf{a}$ és $\beta : \mathbf{u} \to \mathbf{b}$ homogén lineáris leképezések.

2) Bizonyítsuk be, hogy $\alpha + \beta = 1$ (az identitás), $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$, továbbá $\alpha^2 = \alpha$ és$\beta^2 = \beta$ (*idempotensek*).

3) Jellemezzük az idempotens transzformációkat. Ha ε és η idempotensek, akkor mit jelent $\varepsilon\eta = \varepsilon$, $\varepsilon\eta = \eta$, $\varepsilon\eta = 0$?

4) Legyen ε idempotens és η tetszőleges. Mit jelentenek a fenti kapcsolatok ekkor?

5) A 2) feladatbeli feltételek közül melyek biztosítják, hegy ezek az 1) feladatbeli kapcsolatban állnak egy direkt összeggel?

2. A determináns. A síkbeli terület és a térbeli térfogat kiindulása a paralelogrammák területe, illetve a paralelepipedonok térfogata. Ezeknek az alakzatoknak a megfelelőit magasabb dimenzióban *paralelotop*oknak nevezik. Ezeket az alakzatokat vektorok "feszítik ki". Ennek megfelelően a területük vagy a térfogatuk egy annyi változós függvény, amennyi dimenziós a vektortér. A továbbiakban ezek helyett a szavak helyett egységesen a *mérték* szót fogjuk használni.

Nézzük meg, milyen tulajdonságú az n–dimenziós tér egy $\mu(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ mértéke.

Tekintsük az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ által kifeszített paralelotopot. Ha itt elvégezzük az $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1' + \mathbf{u}_1''$ helyettesítést, akkor egy olyan "testet" kapunk, amely a $\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n$ és $\mathbf{u}_1'', \ldots, \mathbf{u}_n$ testekből ezek "egymásrahelyezéseként" adódik. (Síkbeli példa!!) Mivel e két utóbbi testnek csak lapja közös, ezért térfogatuk összege adja az eredeti test térfogatát. Másszóval a mérték additív.

Ha a kifeszítő vektorok valamelyikét c–szeresre nyújtjuk, akkor a mérték is c–szeresére növekszik. Ez viszont csak akkor igaz, ha c pozitív. Ennek a fogalomnak véges testek esetén nincs értelme; a komplex számtest esetében is gondot okoz. De az is kellemetlen, hogy ez az egyszerű kapcsolat nem mindig teljesül. Éppen ezért célszerű az "előjeles" területre, illetve térfogatra térni. Gondolatilag ez azt jelenti, hogy például a terület "előjele" a körüljárási iránytól függ. Ha ezt megváltoztatjuk, az előjel is megváltozik. Azt nem tudjuk, hogy melyik a "pozitív" és melyik a "negatív".

Ezzel a felfogással azt mondhatjuk, hogy:

Az n–dimenziós térben a mérték egy n–lineáris függvény,...

Van azonban a mértéknek még egy további tulajdonsága. Nevezetesen, ha a kifeszítő vektorok között kettő megegyezik, akkor a "test" elfajul, a mérték 0–vá válik. Mint láttuk, az pontosan azt jelenti, hogy a mérték olyan függvény,

... amely bármely két változójában antiszimmetrikus.

Ha minden vektor–n–eshez a 0–t rendeljük hozzá, akkor mértéket kapunk, amit *triviális mérték*nek nevezünk.

Tétel. *1. Az n–dimenziós tér mértékei a függvényműveletekre nézve vektorteret alkotnak.*

2. Ha a mérték argumentumai lineárisan összefüggenek, akkor a mérték a 0 értéket veszi fel.

3. A mértékek tere legfeljebb egydimenziós.

4. Ha a mérték egy bázis elemeire a 0 értéket veszi fel, akkor triviális. □

Sokkal nehezebb annak a kimutatása, hogy

Tétel. *A mértékek tere pontosan egydimenziós.*

Bizonyítás. Azt kell bizonyítani, hogy létezik nem–triviális mérték. Ezt az $\mathcal{U}$ vektortér dimenziójára vonatkozó teljes indukcióval végezzük:

Legyen $\mathbf{e}$ az egydimenziós tér egy bázisa. Ekkor $\mu(c\mathbf{e}) = c$ mérték.

Tegyük fel, hogy n–dimenziós térre már igaz az állítás, és legyen $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ az $(n+1)$–dimenziós $\mathcal{U}$ vektortér egy bázisa. Legyen $\mathcal{E} = \langle \mathbf{e}_0 \rangle$ és $\mathcal{V} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$. Ekkor $\mathcal{U} = \mathcal{E} + \mathcal{V}$. Legyen μ' a $\mathcal{V}$ altéren egy nem–triviális mérték. Az $\mathcal{U}$ tér tetszőleges vektorára $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_0 + \mathbf{v}$, alkalmas $\mathbf{u}$–tól függő u skalárral és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorral. Eszerint úgy kell meghatározni a:

$$\mu(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_n) = \mu(u_0\mathbf{e}_0 + \mathbf{v}_0, u_1\mathbf{e}_0 + \mathbf{v}_1, \dots, u_n\mathbf{e}_0 + \mathbf{v}_n)$$

értéket, hogy nem–triviális mértéket kapjunk. A linearitás miatt ez olyan $\mu(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots \mathbf{w}_n)$ értékek összege, ahol minden egyes szóbajövő i–re $\mathbf{w}_i \in \{c_i\mathbf{e}_0, \mathbf{v}_i\}$. Ennek az összegnek 2^{n+1} tagja van. E tagok legtöbbje viszont 0. Ha ugyanis legalább két helyen a $\mathbf{e}_0$ vektor skalárszorosa áll, akkor az előző tétel miatt 0–t kapunk. Ugyenezért 0 az a tag is, ahol csak $\mathcal{V}$–beli vektorok állnak. Ami megmarad, az egy

$$u_0 \cdot m_0 + u_1 \cdot m_1 + \dots + u_n \cdot m_n$$

alakú összeg, ahol

$$m_i = \mu(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{e}_0, \mathbf{v}_{i+1} \dots, \mathbf{v}_n).$$

Ez a kifejezés nem csak a $\mathbf{v}_j$ vektoroktól, hanem attól is függ, hol helyezkedik el az $\mathbf{e}_0$ vektor. A $\mathbf{e}_0$ vektor i darab helycserével az első helyre vihető. Az antiszimmetria miatt ez $(-1)^i$–nel való szorzást jelent, tehát

$$m_i = (-1)^i \cdot \mu(\mathbf{e}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1} \dots, \mathbf{v}_n).$$

Ez a kifejezés a $\mathcal{V}$ altéren egy n–lineáris antiszimmetrikus függvény, tehát mérték. Tekintettel arra, hogy az eredeti mérték nem–triviális, ezért ez sem az. Az indukciós feltevés szerint ez tehát a μ' skalárszorosa, feltehető, hogy azzal egyenlő. Eszerint lényegében csak

$$m_i = (-1)^i \cdot \mu'(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1} \dots, \mathbf{v}_n)$$

lehetséges. Vegyük észre, hogy nem sokkal többet csináltunk annál, mint beláttuk, hogy a mérték lényegében egyértelmű. A többlet az, hogy látjuk, hogyan kell definiálni. Azt még be kell látni, hogy ez valóban mérték lesz.

Induljunk ki tehát az $\mathcal{U} = \mathcal{E} + \mathcal{V}$ direkt összegből, minden $\mathbf{u}_i$ vektort írjunk fel $\mathbf{u}_i = u_i\mathbf{e}_0 + \mathbf{v}_i$ alakba. Legyen $\mu'(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ és definiáljuk:

$$\mu(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_n) = u_0 \cdot m_0 + u_1 \cdot m_1 + \dots + u_n \cdot m_n, \text{ ahol} \tag{1}$$

$$m_i = (-1)^i \cdot \mu'(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1} \ldots, \mathbf{v}_n). \tag{2}$$

Azt kell belátnunk, hogy ez egy nem–triviális mérték. Az eleve világos, hogy nem–triviális, hiszen $\mu(\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$. Legyen $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i' + \mathbf{u}_i''$. Ekkor az (1) alatti összegben $j \neq i$ esetén az $u_j \cdot m_j = u_j \cdot (m_j' + m_j'')$ alakú felbontás adódik (2) miatt. Az i indexre viszont $u_i \cdot m_i = (u_i' + u_i'') \cdot m_i$ adódik. Hasonlóan járhatunk el a skalárral való szorzás esetében is.

Az antiszimmetriát az alábbi módon láthatjuk be:

Tegyük fel, hogy az eredeti vektorok között kettő megegyezik, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$, azaz $u_i = u_j = u$ és $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j = \mathbf{v}$. Azt is feltehetjük, hogy $i < j$. Az (1) alatti felbontásban $k \notin \{i, j\}$ esetén $m_k = 0$, hiszen μ' antiszimmetrikus. Így a megmaradó összeg:

$$u \cdot [(-1)^i \cdot m_i + (-1)^j \cdot m_j], \qquad \text{ahol} \tag{3}$$

$$m_i = \mu'(\ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots),$$

$$m_j = \mu'(\ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots).$$

Ahhoz, hogy a $\mathbf{v}_j$ vektort az i–edik helyre hátra vigyük $j - i - 1$ cserére van szükség (gondoljuk meg, hogy a $j = i + 1$ esetben 0 számú csere szükséges!). A μ' antiszimmetriája miatt tehát $m_j = (-1)^{j-i-1} m_i$. Eszerint a (3) alatti összeg:

$$u \cdot [(-1)^i \cdot m_i + (-1)^{j+j-i-1} m_i] = u \cdot m_i \cdot [(-1)^i + (-1)^{i+1}] = 0;$$

tehát μ valóban antiszimmetrikus. □

Tétel. *Legyen μ nem–triviális mérték az n–dimenziós $\mathcal{U}$ vektortéren. Ekkor a tér minden φ lineáris transzformációjához létezik pontosan egy olyan $D(\varphi)$ skalár, amelyre bármely $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathcal{U}$ esetén:*

$$\mu(\varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n)) = D(\varphi) \cdot \mu(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n).$$

Bizonyítás. Mivel φ homogén lineáris, ezért $\mu(\varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n))$ n–lineáris; továbbá nyilvánvalóan antiszimmetrikus. Ezért a μ mértéknek skalárszorosa. □

Tétel. *Az ι identitásra $D(\iota) = 1$. $D(\varphi) = 0$ akkor és csak akkor, ha φ szinguláris. $D(\varphi\psi) = D(\varphi)D(\psi)$. Ha létezik σ^{-1}, akkor $D(\sigma^{-1}\varphi\sigma) = \mathcal{D}(\varphi)$.*

Bizonyítás. Az első állítás azonnal következik a $D(\varphi)$ definiciójából. A második állítás abból következik, hogy egy $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ bázisra $\{\varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n)\}$ pontosan akkor bázis, ha φ reguláris. A harmadik állítást a következőképpen láthatjuk be. Egyrészt

$$\mu(\varphi\psi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi\psi(\mathbf{u}_n)) = D(\varphi\psi) \cdot \mu(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n), \quad \text{másrészt}$$

$$\mu(\varphi\psi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi\psi(\mathbf{u}_n)) = D(\varphi) \cdot D(\psi) \cdot \mu(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n).$$

$D(\varphi\psi)$ egyértelműségéből azonnal következik az állítás. A tétel utolsó állítása ennek triviális következménye. □

"Metatétel". *A lineáris transzformációk minden olyan tulajdonsága átvihető mátrixokra, amely a* $\varphi \to \sigma^{-1}\varphi\sigma$ *megfeleltetésre invariáns.*

Ha $A = [\alpha]$, akkor A *determinánsá*nak nevezzük $det(A) = D(\alpha)$–t.

Tétel. $det(A) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* A *szinguláris. Egy mátrix determinánsa nem változik, ha valamely sorának skalárszorosát egy másik sorhoz adjuk, vagy valamely sorának skalárszorosát egy másik oszlophoz adjuk, két sorát vagy két oszlopát felcseréljük. Ha egy mátrix valamely sorát vagy oszlopát egy* c *skalárral szorozzuk, akkor determinánsa is* c*–szerere változik.*

Bizonyítás. Az első állítás a transzformációkra vonatkozó hasonló állítás folyománya. A második állításnál szereplő átalakítást végrehajtó mátrixok olyan transzformációnál jelentkeznek, amelyek egy vektorhoz egy másik skalárszorosát adják. Az antiszimmetria miatt ezek nem változtatják a mértéket. Hasonló meggondolással adódik a harmadik állítás is. □

Tétel. *Diagonális mátrix determinámsa a diagonális elemek szorzata. Transzponált determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával*

Bizonyítás. Az első állítás azonnal következik az előző tételből. A második állítás azért igaz, mert az eredeti mátrixot és a transzponáltat "transzponált" lépésekkel diagonalizálva ugyanazt a diagonális mátrixot kapjuk. □

Szerepelt a részmátrix fogalma már előbb. Az A mátrixnál $A_{i,j}$ jelöli azt a részmátrixot, amit az i–edik sor és a j–edik oszlop elhagyásával nyerünk. A mérték rekurzív definiciójából következik:

Kifejtési tétel.

$$det(A) = a_{1,1} \cdot det(A_{1,1}) + \cdots + (-1)^{1+i} a_{1,i} \cdot det(A_{1,i}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1,n} \cdot det(A_{1,n}).$$

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be a kifejtési tételt reszőleges sorra:

$$det(A) = a_{j,1} \cdot det(A_{j,1}) + \cdots + (-1)^{j+i} a_{j,i} \cdot det(A_{j,i}) + \cdots + (-1)^{j+n} a_{j,n} \cdot det(A_{j,n}).$$

2) Bizonyítsuk be a kifejtési tételt oszlopokra:

$$det(A) = a_{1,i} \cdot det(A_{1,i}) + \cdots + (-1)^{j+i} a_{j,i} \cdot det(A_{j,i}) + \cdots + (-1)^{n+i} a_{n,i} \cdot det(A_{n,i}).$$

3) Gondoljuk meg, miképpen adódik a mérték rekurzív definiciója alapján a *Laplace kifejtés*: Válasszunk ki r darab sort: $i_1, \ldots, i_r$. Ezen indexek halmaza legyen I. Tekintsük emellett a megmaradó $s = n - r$ sort: $i'_1, \ldots, i'_s$. Ezeknek az indexeknek a halmaza legyen J. Válasszunk ki minden lehetséges módon r darab oszlopot, Ezek halmazai legyenek $R_1, \ldots, R_k$. Ezek elhagyásával megmaradó oszlopok indexhalmazai legyenek $S_1, \ldots, S_k$.

A J indexhalmazhoz tartozó sorok és az S_t indexhalmazhoz tartozó oszlopok elhagyásával kapott (négyzetes!) mátrixot jelölje $A_{I,t}$. Az I indexhalmazhoz tartozó sorok és az R_t indexhalmazhoz tartozó oszlopok elhagyásával kapott (négyzetes!) mátrixot jelölje $A_{J,t}$. Legyen $n(I,t) = \sum\{i | i \in I\} + \sum\{j | j \in R_t\}$.

Most készítsük el a $(-1)^{n(I,t)} \cdot det(A_{I,t}) \cdot det(A_{J,t})$ szorzatokat minden $t = 1, \ldots, k$ esetre. Ezek összege megegyezik az A determinánsával. (Hasonlóan járhatunk el a sorok helyett az oszlopokkal.)

3) Legyen $\mathbf{R}$ a $\mathbf{K}$ test részgyűrűje. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{R}$–beli elemű mátrix determinánsa is $\mathbf{R}$–ben van. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{R}$–beli elemű mátrix inverze pontosan akkor lesz ugyancsak $\mathbf{R}$–beli elemű mátrix, ha determinánsa $\mathbf{R}$–ben egység.

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz bijekcióit *permutálások*nak vagy *permutációk*nak nevezik. Ezek a függvényszorzásra nézve egy *nem–kommutatív csoport*ot alkotnak, amelyet S_n jelöl.

Legyen $\sigma \in S_n$. Legyenek $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ha $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$, akkor azt mondjuk, hogy ez a pár *inverzióban áll.* A σ permutálásnál található összes inverzió számát $I(\sigma)$ fogja jelölni.

Az inverziók számát könnyen meghatározhatjuk a következőképpen:

Írjuk fel a $[\sigma(1), \ldots, \sigma(n)]$ számsorozatot. Itt, az i–edik helyen $\sigma(i)$, a j–edik helyen $\sigma(j)$ áll. Akkor áll fenn inverzió, ha egy későbbi helyen ($i < j$) kisebb ($\sigma(j) < \sigma(i)$) szám áll. Az inverziók számát tehát az ilyen párok száma adja meg.

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy S_n valóban csoport.

2) Bizonyítsuk be, hogy $|S_n| = n!$. (Mikor egyenlő két függvény?)

3) Bizonyítsuk be, hogy $\sigma \in S_n$ esetén $I(\sigma) \leq \binom{n}{2}$.

4) Mit jelent az, hogy $I(\sigma) = 1$?

5) Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$ esetén van olyan $\sigma \in S_n$, amelyre $I(\sigma) = k$.

Tétel. *Bármely n–szer n–es mátrix determinánsa tekinthető akár oszlopvektorain, akár sorvektorain értelmezett mértéknek. E mérték az identitás–mátrixra 1. Ha a mátrix i–edik sorában a $\sigma(i)$–edik elem 1, és a többi 0, akkor ennek a determinánsa $(-1)^{I(\sigma)}$. Az ilyen mátrixot (a σ–hoz tartozó) permutációs mátrixnak nevezik.*

Bizonyítás. Az első állítás azonnal következik a mátrix determinánsánsk a kiszámítási módjából. A második állítás triviális.

Legyen I_σ a σ–hez tartozó permutációs mátrix. Tekintsük azt a legkisebb i–t, amely valamelyik j–vel inverzióban áll. Ez azt jelenti, hogy $k < i$ esetén $\sigma(k) = k$. Így a mátrix első $i-1$ sorában a fődiagonálisban állnak az 1–esek, míg az i–edik sorban a j–edik helyen.

Írjuk most fel a $[\sigma(1), \ldots, \sigma(n)]$ számsorozatot. Ha itt az i–edik és a j–edik helyen álló számokat felcseréljük, ez annak felel meg, hogy a megfelelő permutációs mátrixban felcseréltük az i–edik és j–edik sort. Ezáltal a mátrix determinánsa az antiszimmetria miatt előjelet vált.

Végezzünk most cseréket a következő módon. Vegyük a sorozatban az első olyan számot (legyen ez az i–edik helyen álló), amelyik után kisebb következik, és ezt cseréljük fel az utána állóval. Ezáltal egyetlen más számpár esetében sem változott meg az inverzióban állás illetve inverzióban nem állás; hiszen e két szám helyzete csak egymáshoz képest változott meg. Ez viszont megváltozott; az itt fennálló inverziót megszüntettük; az inverziók száma eggyel csökkent. Ez az eljárás mindaddig folytatható, amig valamelyik pár inverzióban áll. Így pontosan $I(\sigma)$ lépésben az identitásmátrixhoz jutunk, ami $I(\sigma)$ számú előjelváltást okoz a mátrix determinánsában. Ezért ennek a determinánsa valóban $(-1)^{I(\sigma)}$. $\square$

Tétel. *Legyen $A = [a_{i,j}]$ egy n–szer n–es mátrix. Ekkor*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

Bizonyítás. Mint láttuk, a mátrix determinánsa tekinthető oszlopvektorainak multilineáris antiszimmetrikus függvényeként, ami egy mérték, méghozzá olyan, hogy az identitás–mátrixhoz az 1–et rendeli. Az A mátrix j–edik oszlopában $a_{1,j}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{n,j}\mathbf{e}_n$ áll, ahol $\mathbf{e}_i$ az az oszlopvektor, amelyben az i–edik helyen 1 áll a többi helyen pedig 0.

A multilinearitás miatt tehát $det(A)$ egy olyan n^n tagú összeg alakjában írható fel, amelyben a tagok olyan mátrixok determinánsának a skalárszorosai, amely mátrixokban minden oszlopban pontosan egy 1–es áll, a többi eleme 0. Az antiszimmetria miatt minden ilyen determinás 0, hacsak nem különböző sorban állnak az 1–esek. Így, a megmaradó tagokra:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \cdot det(I_\sigma),$$

ami pontosan a kívánt összefüggést adja. □

Javasolt feladat: Határozzuk meg az alábbi $A = [a_{i,j}]$ (n–szer n–es) mátrixoknak a determinánsát: 1) $a_{i,j} = -\delta_{i,j}$. 2) $a_{i,j} = \delta_{i,n-j}$. 3) $a_{i,j} = -\delta_{i,n-j}$.

2. A sajátértékek meghatározása. Legyen a az $\mathcal{U}$ vektortér egy α lineáris transzformáció egy sajátértéke. Ez azt jelenti, hogy alkalmas nem–0 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ vektorra $\alpha(\mathbf{u}) = a\mathbf{u} = a\iota(\mathbf{u})$, ahol ι jelöli az identikus transzformációt. Másszóval $(\alpha - a\iota)(\mathbf{u}) = 0$, tehát $\mathbf{u} \in Ker(\alpha - a\iota)$. Fordítva is, ez utóbbi tartalmazásból következik, hogy a sajátérték.

Az a skalár tehát pontosan akkor sajátértéke az α lineáris transzformációnak, ha $\alpha - a\iota$ magtere tartalmaz nem–0 vektort, azaz $\alpha - a\iota$ szinguláris. Egy lineáris transzformáció pontosan akkor szinguláris, ha mátrixának determinánsa 0. Jelölje A az α transzformáció mátrixát és I az identitásét. Eszerint olyan a skalárokat keresünk, amelyre $det(A - aI) = 0$. Mivel a "ismeretlen", ezért feladatunk a $det(A - xI)$ egyenlet megoldása. Legyen $A = [a_{i,j}]$. Ebből úgy kaphatjuk a vizsgált mátrixot, hogy a fődiagonális elemeiből x–et kivonunk. A mátrix fődiagonálisában tehát rendre $a_{1,1} - x, \dots, a_{n,n} - x$ állnak, míg többi eleme megyegyezik az A mátrix megfelelő helyen álló elemével.

Az így kapott $\chi_A(x)$ polinomot az A mátrix *karakterisztikus polinom*jának nevezzük.

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy a karakterisztikus polinom foka megegyezik a mátrix méretével.

2) Határozzuk meg a karakterisztikus polinom főegyütthatóját.

3) Határozzuk meg a karakterisztikus polinom konstans tagját.

4) Határozzuk meg a karakterisztikus polinom második tagjának az együtthatóját.

5) Milyen kapcsolatban állnak egymással az A és $A - cI$ mátrixok sajátértékei, sajátvektorai és karakterisztikus polinomjai?

6) Bizonyítsuk be, hogy ha $dim(Ker(A)) = k$, akkor 0 az A karakterisztikus polinomjának legalább k–szoros gyöke. Adjunk meg olyan példát, ahol nem áll fenn egyenlőség.

7) Hányszoros gyöke c az A karakterisztikus polinomjának, ha a c–hez tartozó sajátaltér k dimenziós.

8) Adjunk meg a kétdimenziós valós térben olyan transzformációt, amelynek nincs sajátvektora.

9) Bizonyítsuk be, hogy a háromdimenziós valós térben minden transzformációnak van sajátvektora. Milyen dimenziók esetében érvényes az analóg megállapítás? Adjunk példákat arra, hogy a többi esetben van olyan transzformáció, amelynek nincs sajátvektora.

10) Hogyan szólnak a megfelelő állítások a komplex vektorterekre?

11) Bizonyítsuk be, hogy a racionális test feletti n–dimenziós térben $n \neq 1$ esetéban mindig van olyan transzformáció, amelynek nincs sajátvektora.

12) Mutassuk meg, hogy hasonló eredmény érvényes a véges testekre, felhasználva azt, hogy a racionális test feletti polinomokra vonatkozó felhasznált állítás véges testekre is igaz.

3. Transzformációk és mátrixok polinomja. Rögzítsük a $\mathbf{T}$ test feletti $\mathcal{U}$ vektortérnek egy α lineáris transzformációját. A $\mathbf{T}[x]$ polinomgyűrű minden egyes $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$ polinomjának feleltessük meg a $f(\alpha) = c_0\iota + c_1\alpha + \cdots + c_k\alpha^k$ transzformációt. Ezeket a transzformációkat α polinomjának nevezzük. Tekintettel arra, hogy a transzformáció hatványai egymással, az identitással és a skalárokkal felcserélhetőek, ezért a szóbanforgó transzformációk egy kommutatív gyűrűt alkotnak. Ennek következménye:

Tétel. *$f(x) \to f(\alpha)$ gyűrűhomomorfizmus.* $\square$

Azt mondjuk, hogy α gyöke $f(x)$–nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Tétel. *Az $\mathcal{U}$ minden α transzformációja gyöke egy legfeljebb n^2 fokú nem–0 polinomnak, és gyöke egy olyan normált $m_\alpha(x)$–nek, amely minden olyan $f(x)$–nek osztója, amelynek α gyöke. Ezt a polinomot α minimálpolinomjának nevezzük.*

Bizonyítás. Az $\iota, \alpha, \ldots, \alpha^{n^2}$ transzformációk száma nagyobb, mint $Hom(\mathcal{U},\mathcal{U})$ dimenziója, ezért lineárisan összefüggenek. léteznek tehát olyan nem–0 skalárok, hogy $c_0\iota + c_1\alpha + \cdots + c_{n^2}\alpha^{n^2} = 0$. Ez pedig azt jelenti, hogy α gyöke a $c_0 + c_1x + \cdots + c_{n^2}x^{n^2}$ nem–0 polinomnak.

A kommutativitás miatt azok a polinomok, amelynek α gyöke, egy ideált alkotnak. Mivel test feletti polinomgyűrű főideálgyűrű, ezért ennek az ideálnak a normált generátoreleme lesz $m_\alpha(x)$. $\square$

Javasolt feladat: 1) Bizonyítsuk be, hogy a fenti gyűrű nem integritási tartomány.

2) Mutassuk meg, hogy a komplex–elemű $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$ alakú mátrixok nem–kommutatív gyűrűt alkotnak, amelyben nincsenek nullosztók. Ennek ellenére az $x^2 + 1$ polinomnak kettőnél több gyöke van.

Tétel. *α minimálpolinomjának a gyökei pontosan a sajátértékek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy c egy sajátérték és legyen $\mathbf{u}$ egy ehhez tartozó sajátvektor. Ebből azonnal következik, hogy $\alpha^r(\mathbf{u}) = c^r\mathbf{u}$. Így tetszőleges $f(x)$ polinom esetén $f(\alpha)(\mathbf{u}) = f(c) \cdot \mathbf{u}$. Ha tehát $f(\alpha) = 0$, akkor $\mathbf{u} \neq 0$ miatt $f(c) = 0$ is igaz.

A megfordítás bizonyítására az invariáns altereknél kerül sor. $\square$

A fenti "metatételből" következik, hogy négyzetes mátrixok polinomja és minimálpolinomja hasonlóképpen értelmezhető.

Javasolt feladat: 1) Határozzuk meg a valós sík origón átmenő egyeneseire való tükrözés és az origó körüli forgatásainak a sajátértékeit.

2) Határozzuk meg a sík eltolásainak a sajátértékeit!?

3) Mutassunk példát arra, hogy a karakterisztikus és a minimálpolinom különbözőek.

4) Bizonyítsuk be, hogy a valós sík bármely transzformációja vagy az identitás skalárszorosa, vagy minimálpolinomja másodfokú.

5) Legyen a valós sík α lineáris transzformációj'nak másodfokú minimálpolinomja reducibilis a valós számtest felett. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\alpha = a\iota + b\varepsilon$ alakú, ahol a, b valósak és $\varepsilon^2 = \iota$ de $\varepsilon \neq \iota$.

6) Legyen a valós sík α lineáris transzformációj'nak másodfokú minimálpolinomja irreducibilis a valós számtest felett. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\alpha = a\iota + b\eta$ alakú, ahol a, b valósak és $\eta^2 = -\iota$.

7) Írjuk fel "alkalmas" bázisban az előbbi két feladatban szereplő ε és η transzformáció mátrixát.

Tetszőleges $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ lineáris transzformáció "létrehozza" a $\mathbf{T}[x]$ polinomgyűrű "hatását" $\mathcal{U}$–n a következőképpen:

$$f(x) : \mathbf{u} \to f(\alpha)(\mathbf{u}).$$

Ezáltal $\mathcal{U}$–ból egy $\mathbf{T}[x]$ feletti "vektortérszerű" struktúrát nyertünk. A vektortér elemeit "szorozhatjuk" a polinomokkal. Könnyen belátható, hogy mindazok az azonosságok teljesülnek, mint amelyeket a vektortereknél megköveteltünk.

Ilyen esetekben egy *gyűrű fölötti modulus*ról beszélünk.

Mivel a gyűrűk esetében az osztás általában nem végezhető el, ezért a lineáris kombinációkra nem teljesülnek a vektorterekben fennálló törvényszerűségek. Nevezetesen abból, hogy vektoroknak egy nem–triviális lineáris kombinációja 0, nem következik az, hogy valamelyikük kifejezhető volna a többiek gyűrűbeli skalárokkal való lineáris kombinációjaként.

Invariáns alterek. Egy $\mathcal{U}$ vektortér egy α lineáris transzformációja nem lineáris transzformációja a tetszőleges $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ altérnek. A $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ alteret az α invariáns alterének nevezzük, ha minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén $\alpha(\mathbf{v}) \in \mathcal{V}$. Természetesen minden sajátaltér invariáns altér.

Könnyen belátható az alábbi

Tétel. *A α transzformációnak invariáns altere az egész tér és a null–tér. A α transzformáció invariáns altereinek közös része és ezek generátuma is invariáns altér.* $\square$

<u>Ha</u> az $\mathcal{U}$ vektortér felbomlana a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ invariáns alterek direkt összegére, akkor az α leirását visszavezethetnénk e két altér egy–egy lineáris transzformációjának a vizsgálatára:

Tétel. *Legyen α az $\mathcal{U}$ lineáris transzformációja és $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$ invariáns alterekre direkt összegére való felbontás. Ekkor van olyan egyértelmű β és γ lináris transzformációja ezeknek az altereknek, amelyekre tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ esetén $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v}) + \gamma(\mathbf{w})$.*

Legyen B és C e transzformációk mátrixa egy–egy $\mathcal{V}$–beli, illetve $\mathcal{W}$–beli bázisban. Ha α–nak az A mátrixát e bázisik egyes1tésében nézzük, akkor az "blokkokra diagonizált" lesz, azaz $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ alakú. Ehelyett használni fogjuk az $A = B \oplus C$ valamint a $\alpha = \beta \oplus \gamma$ felírást is.

Tetszőleges $f(x)$ polinom esetén $f(A) = f(B) \oplus f(C)$.

Ez általánosabban is igaz: Ha $A_1 = B_1 \oplus C_1$ és $A_2 = B_2 \oplus C_2$, ahol mind A_1 és A_2, mind B_1 és B_2 ugyanannyi sorból állnak, akkor

$$(B_1 \oplus C_1) + (B_2 \oplus C_2) = (B_1 + B_2) \oplus (C_1 + C_2); \ (B_1 \oplus C_1) \cdot (B_2 \oplus C_2) = (B_1 \cdot B_2) \oplus (C_1 \cdot C_2).$$

Bizonyítás. Legyen β a α–nak $\mathcal{V}$–re és γ a α–nak $\mathcal{W}$–re való megszorítása. Ezekre nyilván teljesül a $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v}) + \gamma(\mathbf{w})$ összefüggés.

Az egyesített bázisban a $\mathcal{V}$–beli vektorok képének nem lesz $\mathcal{W}$–beli komponense és $\mathcal{W}$–beli vektorok képének nem lesz $\mathcal{V}$–beli komponense. Ezért a mátrix valóban blokkokra diagonizált lesz. A mátrixokkal végzett műveletekre vonatkozó állítás azonnal következik abból, hogy miképpen végezzük a mátrixműveleteket. Sőt, az összeadásnal az sem kell, hogy A és B négyzetes mátrixok legyenek.

(Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a "csupa 0" blokkok természetesen általában nem négyzetesek. $\square$

Az invariáns alterekre való felbonthatóságról sokat elárul a mátrix minimálpolinomja. Természetesen a minimálpolinom meghatározása nem egyszerű.

Tétel. *Legyen α a $\mathbf{T}$ test feletti n–dimenzós $\mathcal{U}$ tér egy lineáris transzformációja. Legyen az α–nak az $m(x)$ minimálpolinomja k–adfokú. Tegyük fel, hogy $m(x)$ felbontható $\mathbf{T}$–ben relatív prím $g(x)$ és $h(x)$ polinomok szorzatára. Ekkor vannak olyan $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ invariáns alterek valamint ezeknek β és γ lineáris transzformációi, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$, $\alpha = \beta \oplus \gamma$, β minimálpolinomja $g(x)$ és γ minimálpolinomja $h(x)$.*

Bizonyítás. A polinomfelbontás szerint $m(x) = g(x)h(x)$. Mivel test feletti polinomgyűrű főideálgyűrű és a két tényező relatív prím, ezért van ulyan $u(x), v(x) \in \mathbf{T}[x]$, amelyekre $u(x)g(x) + v(x)h(x) = 1$. Legyen $\varphi = g(\alpha)$ és $\psi = h(\alpha)$, továbbá $\mathcal{V} = Ker(\varphi)$ és $\mathcal{W} = Ker(\psi)$.

Mindenekelőtt belátjuk, hogy ezek invariáns alterek és $\mathcal{U}$ a direkt összegük. Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ akkor és csak akkor, ha $g(\alpha)(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) = 0$. Ekkor $g(\alpha)(\alpha(\mathbf{v})) = \alpha(g(\alpha))(\mathbf{v}) = \alpha(0) = 0$ alapján $\alpha(\mathbf{v}) \in \mathcal{V}$, tehát $\mathcal{V}$, és hasonlóképpen $\mathcal{W}$, invariáns altér. Ha $\mathbf{u} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, akkor $\mathbf{u} = \iota(\mathbf{u}) = u(\alpha)g(\alpha)(\mathbf{u}) + v(\alpha)h(\alpha)(\mathbf{u}) = 0 + 0$, tehát a két altérnek csak a nullvektor a közös elemük. Az előzőhöz hasonlóan tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorra: $\mathbf{u} = \iota(\mathbf{u}) = u(\alpha)g(\alpha)(\mathbf{u}) + v(\alpha)h(\alpha)(\mathbf{u})$ teljesül. Mivel $g(\alpha)h(\alpha) = m(\alpha) = 0$, ezért jobb oldalon az első tag $Ker(\psi)$–nek, a második tag pedig $Ker(\varphi)$–nek az eleme. Ezért valóban igaz a direkt összeg felbontás.

A β és γ transzformációk csak az α–nak $\mathcal{V}$–re illetve $\mathcal{W}$–re való megszorításai lehetnek, hiszen csak ezekre teljesül a $\alpha = \beta \oplus \gamma$ felírás. Azt kell belátni, hogy ezeknek a minimálpolinomja valóban $g(x)$, illetve $h(x)$. Mindenesetre $g(\beta)$ a $g(\alpha)$–nak $\mathcal{V}$–re való megszorítása. De $\mathcal{V}$ definiciószerint pontosan azokból a vektorokból állt, amelyeket $\varphi = g(\alpha)$ a nullvektorba vitt. Így β minimálpolinomja csak $g(x)$–nek egy $g_1(x)$ osztója és hasonlóképpen γ minimálpolinomja csak $h(x)$–nek egy $h_1(x)$ osztója lehet. Ekkor viszont az $m_1(x) = g_1(x)h_1(x)$ polinomra $m_1(\alpha) = 0$, azaz $m(x)$ osztója $m_1(x)$–nek. Ebből pedig tüstént következik, hogy mindkét osztó egyenló az eredetivel. $\square$

Tétel. *Legyen α a $\mathbf{T}$ test feletti n–dimenzós $\mathcal{U}$ tér egy lineáris transzformációja. Legyen az α–nak a minimálpolinomja $m(x) = f(x)^s$, ahol $f(x)$ irreducibilis r–edfokú polinom. Ha $\mathcal{U} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ invariáns alterek direkt összegére való felbontás, akkor az indukált $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ felbontásban α_i minimálpolinomja $f(x)^{s_i}$, ahol s_1 és s_2 maximuma s.*

Bizonyítás. Az világos, hogy mindkét minimálpolinom ilyen alakú, mert $m(x)$–nek osztója. és $f(x)$ irreducibilis. Ha s' az s_1 és s_2 maximuma, akkor $f(\alpha)^s = 0$, és igy csak $s' = s$ lehet. $\square$

A későbbiekben az alábbi tételt abban a speciális esetben fogjuk bizonyítani, amikor a komplex számok — pontosabban, ha algebrailag zárt test — feletti vektortereket tekintünk.

Tétel. *Legyen α a $\mathbf{T}$ test feletti n–dimenzós $\mathcal{U}$ tér egy lineáris transzformációja. Legyen az α–nak a minimálpolinomja $m(x) = f(x)^s$, ahol $f(x)$ irreducibilis r–edfokú polinom. Ha $\mathcal{U}$ nem bomlik fel invariáns alterek direkt összegére, akkor α–nak vannak $\{0\} = \mathcal{V}_0 < \mathcal{V}_1 < \cdots < \mathcal{V}_{s-1} < \mathcal{V}_s = \mathcal{U}$ invariáns alterei, amelyeknek a dimenziója rendre $0, r, \ldots, r^{s-1}, r^s$. Az α–t $\mathcal{V}_i$–re megszorítva a kapott α_i minimálpolinomja $f(x)^i$.* $\square$

Itt és most ennek két következményét bizonyítjuk be:

Tétel. *Legyen α a $\mathbf{T}$ test feletti n–dimenzós $\mathcal{U}$ tér egy lineáris transzformációja. Legyen az α–nak a minimálpolinomja $m(x) = f(x)^s$, ahol $f(x)$ irreducibilis r–edfokú polinom.*

Ekkor $\mathcal{U}$ legalább $r \cdot s$ dimenziós; továbbá α–nak van olyan r–dimenziós $\mathcal{V}$ invariáns altere, amelyre α–t megszorítva a kapott transzformáció minimálpolinomja $f(x)$.

Bizonyítás. Tekintsük a $\beta = f(\alpha)$ lineáris transzformációt. Feltétel szerint $\beta^s = 0$, de $\beta^{s-1} \neq 0$, mert különben $m(x)$ nem volna az α minomálpolinomja. Ezek szerint van olyan $\mathbf{u} \neq 0$ vektor, amelyre $\beta^{s-1}(\mathbf{u}) \neq 0$. Azt állítjuk, hogy $\mathbf{u}, \alpha(\mathbf{u}), \ldots, \alpha^{rs-1}(\mathbf{u})$ lineárisan függetlenek. Valóban, ha ezek egy nem–triviális lineáris kombinációja 0 volna, akkor lenne olyan $r \cdot s$–nél alacsonyabbfokú $g(x)$ polinom, amelyre $g(\alpha)(\mathbf{u}) = 0$. Tekintettel arra, hogy $m(x)$ az α minimálpolinomja, ezért a $d(x) = \text{lnko}(m(x), g(x))$ polinomra is teljesül $d(\alpha)(\mathbf{u}) = 0$. Mivel $d(x)$ osztója $m(x)$–nek, ezért $f(x)$ irreducibilitása következtében $d(x) = f(x)^t$ alakú, ahol $t \leq s$. Mivel $g(x)$ foka $\leq r \cdot s$, ezért ugyanez igaz $d(x)$ fokára is; amiből $t < s$ következik. Ez pedig ellentmond annak, hogy $\beta^{s-1}(\mathbf{u}) \neq 0$.

Legyen most $\mathcal{V} = Ker(\beta)$. Tekintettel arra, hogy $\beta\alpha = \alpha\beta$, ezért $\mathcal{V}$ invariáns altere α–nak. Mivel $\beta^s = 0$, ezért $\mathcal{V}$–ben van nem–0 vektor. Bármely ilyen $\mathbf{v}$ vektorra $f(\alpha)(\mathbf{v}) = 0$ definició szerint. Így az α–t $\mathcal{V}$–re megszorítva a kapott transzformáció minimálpolinomja valóban $f(x)$. $\square$

Ha az α lineáris transzformáció $m(x)$ minimálpolinomjának $a \in \mathbf{T}$ gyöke, akkor a fentiek alapján α–nak van olyan nem–0 invariáns altere, amelyen $\alpha - a\iota$ minden vektort 0–ba visz. Ezért érvényes az alábbi

Következmény. *Lineáris transzformáció minimálpolinomjának minden gyöke a transzformáció sajátértéke.* $\square$

Láttuk, hogy ha egy transzformáció minimálpolinomja relatív prím faktorokra bomlik, akkor a tér olyan invariáns alterek direkt összegére bomlik, amelyeken a transzformáció megszorításának a minimálpolinomja megegyezik a megfelelő faktorral. Egy ilyen felbontásnál a minimálpolinom foka természetesen megegyezik a faktorok fokának az összegével; és a tér dimenziója is megegyezik a szereplő alterek dimenziójának az összegével. Azután beláttuk, hogy ha a minimálpolinom egy irreducibilis polinom hatványa, akkor a foka legfeljebb annyi, mint a tér dimenziója. Ebből minden esetre azonnal adódik:

Következmény. *Egy vektortéren bármely lineáris transzformáció minimálpolinomjának a foka legfeljebb annyi, mint a tér dimenziója.* $\square$

Javasolt feladat: 1) Legyen $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ lineáris transzformáció és $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ tetszőleges altér. Legyen $\alpha(\mathcal{V}) = \{\alpha(\mathbf{v}) | \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ és $\alpha^{-1}(\mathcal{V}) = \{\mathbf{x} | \alpha(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$. Bizonyítsuk be, hogy mind $\alpha(\mathcal{V})$, mind $\alpha^{-1}(\mathcal{V})$ altere $\mathcal{U}$–nak.

2) Általánosítsuk az invariáns alterekre való felbontást több altér esetére.

3) Legyen α az $\mathcal{U}$ tér lineáris transzformációja, és legyen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan minimális fokú normált $m_{\alpha,\mathbf{u}}(x)$ polinom, amelyre $m_{\alpha,\mathbf{u}}(\alpha)(\mathbf{u}) = 0$, és $m_{\alpha,\mathbf{u}}(x)$ osztója minden olyan $h(x)$ polinomnak, amelyre $h(\alpha)(\mathbf{u}) = 0$.

4) Bizonyítsuk be, hogy $m_{\alpha,\mathbf{u}}(x)$ osztója $m_\alpha(x)$–nek.

5) Bizonyítsuk be. hogy $m_\alpha(x)$ az összes $m_{\alpha,\mathbf{u}}(x)$ legkisebb közös többszöröse.

6) A $\mathbf{T}$ test feletti tetszőleges n–edfokú $m(x)$ polinomhoz adjuk meg az n–dimenziós $\mathcal{U}$ vektortérnek egy olyan α lineáris transzformációját, amelynek $m(x)$ a minimálpolinomja.

7) Bizonyítsuk be, hogy az előző példában szereplő α generálta részgyűrű pontosan akkor nullosztómentes, ha $m(x)$ irreducibilis.

8) Bizonyítsuk be, hogy az előző két példában szereplő részgyűrű pontosan akkor test, ha nullosztómentes.

9) Bizonyítsuk be, hogy az előző három példában szereplő részgyűrűben van az $m(x)$ polinomnak gyöke.

10) Legyen $f(x)$ irreducibilis polinom a $\mathbf{T}$ test felett. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\mathbf{L} \geq \mathbf{T}$ test, amelyben $f(x)$–nek van gyöke és $\mathbf{L}$ minden eleme e gyöknek $\mathbf{T}$ feletti polinomja.

11) Legyen $f(x)$ irreducibilis polinom a null–karakterisztikájú $\mathbf{T}$ test felett. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\mathbf{L} \geq \mathbf{T}$ test, amelyben $f(x)$–nek annyi gyöke van amennyi a foka.