Matematikus szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi — megoldási útmutató

1. A szokásos bázisban felírva a mátrixot felső háromszögmátrixot kapunk, tehát a sajátértékek a főátló elemei, vagyis 0, 1, 2. Ezek különbözők, azaz a mátrix diagonalizálható. A megfelelő sajátvektorok 1, $x-5$, $(x-5)^2$.

2. A Gram-Schmidt ortogonalizációval számolva $(1,0,0)^T$, $(1,1,0)^T$, $(3,2,1)^T$ ortogonális bázis, a megfelelő mátrix diagonálisában -2, -1, 2 áll, és ezért az alak indefinit.

3. Legyen $u=(0,0,1)^T$, ekkor $Au=(0,1,1)^T$, és $A^2u=(1,2,2)^T$. Ezek lineárisan függetlenek, és így u generálja az egész modulust, ami tehát ciklikus. Ezért a tanult eljárás szerint a részmodulusok (azaz az invariáns alterek) kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban állnak $m_{A,u}=m_A$ normált osztóival. A minimálpolinom most $(x-1)^3$ (azaz a karakterisztikus polinom asszociáltja, hiszen $(x-1)^2$-nek a mátrix nem gyöke). Így 4 részmodulus van.

4. Adjuk az első sort az utolsóhoz, a másodikat az utolsó előttihez, és így tovább, a nyolcadikat a kilencedikhez. Ekkor az utolsó nyolc sorban az átlókban mindenütt 9 van. Most az első oszlopból vonjuk ki az utolsót, a másodikból az utolsó előttit, és így tovább, a nyolcadikból a kilencediket. Ekkor a főátló alatt csupa nulla lesz, és így az eredmény $(1-8)(2-7)\ldots(8-1)9^8=3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^8$.

5. Legyenek A különböző sajátértékei $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, a kiválasztott megfelelő sajátvektorok $u_1,\ldots,u_n$. Ha $f(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$, akkor nyilván $f(A)(u)=0$. Ha viszont g valódi osztója f-nek, akkor $g(A)(u)\neq 0$. Ezt nyilván elég f maximális osztóira belátni, azaz például $g(x)=(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_{n-1})$-re. De $g(A)(u)=g(A)(u_n)=g(\lambda_n)u_n\neq 0$, hiszen g-nek λ_n nem gyöke. Ezzel beláttuk, hogy $m_{A,u}=f$, azaz A akkor jó, ha $m_A=f$. Ha A jó, akkor így a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres, vagyis A diagonalizálható. Megfordítva, diagonalizálható mátrix minimálpolinomja nyilván a kívánt alakú.

6. A páros dimenziós terek a jók, kivéve a kételemű test feletti kétdimenziós vektorteret. Ez utóbbi nyilván nem jó, hiszen csak három nemtriviális altere van. Tegyük fel, hogy létezik a négy kívánt altér. Ha ezek dimenziója m, n, k, ℓ, akkor $m+n=m+k$ a tér dimenziója, tehát $n=k$. Szimmetriaokokból így $m=n=k=\ell$, vagyis a tér dimenziója $2m$, azaz tényleg páros. Megfordítva, legyen U egy $2m$-dimenziós vektortér, és $b_1,\ldots,b_m,c_1,\ldots,c_m$ egy bázisa. Tekintsük az $V=\langle c_1,\ldots,c_m\rangle$ és $V_\lambda=\langle b_1+\lambda c_1,\ldots,b_m+\lambda c_m\rangle$ altereket, ahol λ eleme a T alaptestnek. Könnyű látni, hogy $V\cap V_\lambda=\{0\}$, és $V_\lambda\cap V_\mu=\{0\}$, ha $\lambda\neq\mu$. Mivel ezek m-dimenziós alterek, a tér a direkt összegük lesz. Ha tehát $|T|\geq 3$, akkor készen vagyunk. Ha $|T|=2$ akkor tekintsük a $V_A=\langle b_1+A(c_1),\ldots,b_m+A(c_m)\rangle$ alteret, ahol $A:V\to V$ lineáris transzformáció. Ekkor $V\cap V_A=\{0\}$, és $V_\lambda\cap V_A=\{0\}$, feltéve, hogy $A-\lambda I$ invertálható, vagyis λ nem sajátértéke A-nak. Így V, V_0, V_1, V_A jó választás, ha A-nak nincs sajátértéke T-ben. Ha V dimenziója 1, akkor ilyen A nincs, különben van (hiszen a minimálpolinomot előírhatjuk).

7. Van. Egy tér bázisa legyen $b_1,\ldots,b_8$, és definiáljuk az A és B lineáris transzformációkat úgy, hogy mindegyik bázisvektort vigyék nullába, az alábbi kivételekkel: $B(b_i)=b_{i+1}$ ha i páratlan, és $A(b_i)=b_{i+1}$, ha $i=2,4,6$. Ekkor $m_A=m_B=x^2$ és $m_{AB}=x^4$.