Matematikus szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi

Minden feladatot külön lapra írjunk, és minden lapon legyen rajta a szerző és a gyakvezér neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *A legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomokból és a nullapolinomból álló $\mathbb{R}$ feletti szokásos vektortéren legyen A az a lineáris transzformáció, melyre $A(p(x)) = (x-5)p'(x)$. Számítsuk ki ennek a sajátvektorait, sajátértékeit. Van-e olyan bázis, amelyben a mátrixa diagonális?*

2. *Tekintsük a $-2x^2 + 4xy - 3y^2 + 4xz - 4z^2$ kvadratikus alakot.*

a) Adjunk meg egy olyan bázist, amelyben négyzetösszeggé válik.

b) Határozzuk meg a karakterét.

3. *Tegyük $\mathbb{R}^3$-öt $\mathbb{R}[x]$-modulussá a $p(x)v = p(A)(v)$ szorzással, ahol*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hány részmodulusa van az így kapott modulusnak?

4. *Számítsuk ki az alábbi 16×16-os determináns értékét.*

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & 8 \\
 & 2 & & & 0 & & & & 7 & \\
 & & \ddots & & & & & \iddots & & \\
 & & & 7 & & & 2 & & & \\
0 & & & & 8 & 1 & & & & 0 \\
 & & & & 1 & 8 & & & & \\
 & & & 2 & & & 7 & & & \\
 & & \iddots & & & & & \ddots & & \\
 & 7 & & & 0 & & & & 2 & \\
8 & & & & & & & & & 1
\end{array}\right|$$

5. *Legyen V egy komplex feletti véges dimenziós vektortér, és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Tekintsük az A összes sajátértékét, mindegyikhez vegyünk egy sajátvektort, és ezeket adjuk össze. Mely A transzformációk esetén teljesül a kapott u vektorra, hogy $m_{A,u} = m_A$?*

6. *Mely véges dimenziós vektortereknek van négy olyan altere, melyek közül bármely kettő direkt összege maga a tér?*

7. *Van-e olyan V vektortér és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$, hogy $m_{AB} = m_A m_B$?*