Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Kilencedik feladatsor

1. *A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi három egyenletrendszert egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket $\mathbb{R}$ felett.*

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2+(x+1)\cdot y-2=0 \\ (x-1)\cdot y^2+x\cdot y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2+(x+1)\cdot y-1=0 \\ (x-1)\cdot y^2+x\cdot y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+1=2y \\ y^2+1=2z \\ z^2+1=2x \end{cases}$$

Vegyes feladatok

2. *Legyen az U vektortér bázisa $\{u_1,u_2,u_3\}$, a V vektortéré $\{v_1,v_2\}$ valós felett. Legyen $A\in\mathrm{Hom}(U,V)$, $S\in\mathrm{Hom}(U)$ és $T\in\mathrm{Hom}(V)$ az alábbi mátrixokkal adva a megfelelő bázisokban.*

$$[A]=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\qquad [S]=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad [T]=\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}$$

Legyen továbbá $B:U\times V\to\mathbb{R}$ egy olyan bilineáris függvény, melynek mátrixa az adott bázisban ugyanaz, mint A mátrixa. Tekintsük most az $\{Su_1,Su_2,Su_3\}$ illetve a $\{Tv_1,Tv_2\}$ új bázisokat. Adjuk meg A, B, S, T mátrixát az új bázisban közvetlen számolással.

3. *Milyen ismert gyűrűkkel izomorfak az alábbi faktorok: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($4\mathbb{Z}$ a néggyel osztható számok halmaza); $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$; $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$; $\mathbb{R}[x]/(x^2+4)$; $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$.*

4. *Írjuk fel a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ faktorgyűrű művelettábláit, és igazoljuk, hogy négyelemű testet kaptunk. Konstruáljunk hasonló módszerrel egy nyolcelemű testet. Izomorfia erejéig hányféle testet kapunk így?*

5. *Jelölje $\mathbb{G}$ a Gauss-egészek gyűrűjét. Test-e a $\mathbb{G}/(3)$ faktorgyűrű? Hány eleme van ennek a faktorgyűrűnek? Van-e $\mathbb{G}$-nek a háromelemű testtel izomorf faktorgyűrűje?*

6. *Legyen R egységelemes gyűrű és M baloldali unitér R-modulus, mely egy elemmel generálható (azaz ciklikus).*

a) Mutassuk meg, hogy M izomorf R-nek mint önmaga feletti modulusnak egy J részmodulusa, azaz balideálja szerinti faktormodulusával.

b) Adjunk meg egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést M faktormodulusai, és R-nek a J-t tartalmazó balideáljai között.

7*. *Legyen n pozitív egész, és R egy végtelen integritási tartomány, melyben az $x\mapsto x^n$ leképezés endomorfizmus. Mutassuk meg, hogy n prímhatvány.*

8*. *Legyen D főideálgyűrű. Generálható-e a $D[x,y]$ gyűrű (x^2,xy,y^2) ideálja két elemmel?*

9*****.** *Egy kártyacsomagot a következő módon akarunk megkeverni:*

a) a legfelső lapot legalulra tesszük;

b) a legfelső két lapot megcseréljük.

Fogunk egy húszfillérest, és sokszor feldobjuk. Ha az eredmény írás, akkor az a)-beli, ha fej, akkor a b)-beli mozdulatot hajtjuk végre. Bizonyítsuk be, hogy ha ezt az eljárást elég sokáig csináljuk, akkor a csomag jól megkeveredik. Hogyan lehet általánosítani a feladatot?