Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Nyolcadik feladatsor

1. *Az alább megadott M modulusok megadott X generátorrendszeréhez készítsük el az alaptétel bizonyításában használt mátrixot, hozzuk ezt normálalakra, és ennek alapján bontsuk fel M-et ciklikus modulusok direkt összegére.*

a) $M = \mathbb{Z}_6^+$ *a* $\mathbb{Z}$ *felett,* $X = \{2, 3\}$.

b) $M = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ *a* $\mathbb{Z}$ *felett,* $X = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

c) $M = \mathbb{C}^n$ *mint a* $\mathbb{C}[x]$ *feletti, az alább megadott mátrixokhoz tartozó szokásos modulus,* X *pedig* $\mathbb{C}^n$ *szokásos bázisa.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *Az alábbiakban megadjuk egy-egy komplex elemű (ismeretlen) mátrix determinánsosztóit. Döntsük el, van-e ilyen mátrix, és ha igen, akkor adjuk meg a minimálpolinomját és a Jordan-féle normálalakját.*

a) $\{1, 1, x^2\}$.

b) $\{1, x, x^2, x^3\}$.

c) $\{1, 1, x, x^3\}$.

d) $\{1, 1, x^2, x^3\}$.

e) $\{1, 1, 1, x^3\}$.

f) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x^2(x-1)^2, x^5(x-1)^4\}$.

3. *Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Legyen M az előző feladatban szereplő harmadik mátrix. Számítsuk ki az M^n sorozat határértékét midőn n tart a végtelenhez.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha M komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.*

További feladatok

6. *Igaz-e, hogy tetszőleges nilpotens (idempotens) valós mátrix valós felett Jordan-alakra hozható? Igaz-e, hogy minden kétszer kettes valós mátrix valós felett Jordan-alakra hozható?*

7. *Mi annak a mátrixnak a Jordan-alakja, amelyben a diagonálissal párhuzamos, alatta lévő második ferde vonalban csupa egyesek vannak, azon kívül pedig csupa nullák?*

8. *Igaz-e, hogy minden komplex elemű négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához? (Két mátrix hasonló, ha bázistranszformációval egymásba vihetők.)*

9. *Igazoljuk, hogy végtelen test felett egy lineáris transzformációnak akkor és csak akkor van véges sok invariáns altere, ha minimálpolinomjának foka megegyezik a tér dimenziójával. Hány invariáns altér van ilyenkor?*