Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév

Hetedik feladatsor

$B = A^*$ akkor és csak akkor, ha minden x, y vektorra $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$. Az A^* mátrixa – ortonormált bázisban – az A mátrixának transzponáltja $\mathbb{R}$ felett, és az A mátrixának transzponált konjugáltja $\mathbb{C}$ felett. Az euklideszi terek speciális transzformációinak elnevezése a következő:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Minden normális transzformáció unitér transzformációval diagonalizálható. Minden szimmetrikus transzformáció ortogonális transzformációval diagonalizálható. Egy transzformáció akkor és csak akkor unitér (ortogonális), ha skalárszorzattartó. Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak.

1. *A sík forgatásai, tükrözései, nyírásai közül melyek ortogonálisak illetve szimmetrikusak? A bázis a szokásos. Változik-e az eredmény ha egy másik ortonormált bázist veszünk?*

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha A ortogonális és szimmetrikus, akkor A^2 az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?*

3. *Legyen*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Diagonalizáljuk M-et alkalmas bázisban.*
b) *Adjuk meg M összes lehetséges felső háromszögmátrix alakját $\mathbb{C}$ tetszőleges ortonormált bázisában. Diagonalizálható-e M unitér transzformációval?*
c) *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{C}$ felett minden lineáris transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix lesz.*
d) *Mutassuk meg, hogy ha $W \leq V$ egy A-invariáns altér, akkor $W^\perp$ (a W ortogonális kiegészítő altere) A^*-invariáns.*
e) *Igazoljuk közvetlenül, hogy $\mathbb{C}$ felett minden normális transzformáció diagonalizálható unitér transzformációval.*
f) *Igaz-e az előző állítás megfelelője valósban?*

4. *Transzformáljuk négyzetösszeggé* **ortonormált bázisban** *a IV/5. feladatban megadott $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ és $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakokat.*

5. *Legyen A egy pozitív definit, B pedig egy tetszőleges bilineáris függvény egy véges dimenziós $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti vektortéren. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas bázisban A is és B is egyszerre négyzetösszeggé válik. Szükséges-e feltenni, hogy A (vagy B) pozitív definit?*

6. *Igazoljuk, hogy azon önadjungált lineáris transzformációk halmazában, melyekhez tartozó kvadratikus alak pozitív szemidefinit, a négyzetgyökvonás egyértelműen elvégezhető.*

7. *Legyenek A és B komplex feletti normális transzformációk. Igaz-e, hogy ha felcserélhetők, akkor megegyeznek a sajátvektoraik? Igaz-e a megfordítás?*