Matematikus gyakorlat, első évfolyam, második félév
Hatodik feladatsor

Ha A Abel-csoport és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $nA = \{na \mid a \in A\}$. Az A *torziócsoport,* ha minden eleme véges rendű; *torziómentes,* ha csak a 0 véges rendű; *szabad,* ha $\mathbb{Z}^+$ néhány példányának direkt összegével izomorf; *osztható*, ha az $nA = A$ minden $0 \neq n \in \mathbb{Z}$-re. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jelöli a komplex p-hatványadik egységgyökök csoportját a szorzásra (p prím).

1. *Számítsuk ki az alábbi faktorok művelettábláit. Milyen ismert csoportot kapunk?*
 a) $\mathbb{Z}^+/4\mathbb{Z}^+$.
 b) $A/21A$, *ahol* $A = \mathbb{Z}_{60}^+ \times \mathbb{Z}_{24}^+$. *Mi lesz a* $(11, 11) + 21A$ *elem rendje?*

2. *Számítsuk ki:* $\mathbb{Z}_n^+ \otimes \mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}_n^+ \otimes \mathbb{Z}_m^+$; $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Z}_n^+$; $\mathbb{Q}^+ \otimes \mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_n^+$; $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$. *Igaz-e:*
 a) *Osztható csoportnak bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata osztható.*
 b) *Torziócsoport bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata torziócsoport.*
 c) *Osztható csoportnak bármely torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.*
 d) *Két szabad Abel-csoport tenzorszorzata is szabad.*
 e) *Ha* A *tetszőleges Abel-csoport, akkor* $\mathbb{Z}_n^+ \otimes A \cong A/nA$.

3. *Számítsuk ki* $A = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}^+$ *esetén* $\mathrm{Hom}(A, \varphi)$*-t,* $\mathrm{Hom}(\varphi, A)$*-t és* $A \otimes \varphi$*-t. Vizsgáljuk meg, hogyan függ össze* φ *és az eredmény injektivitása, illetve szürjektivitása.*
 a) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *az a homomorfizmus, ami minden elemhez az* n*-szeresét rendeli.*
 b) $\varphi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{nm}$, *az* n*-nel szorzás.*
 c) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ *a* mod n *vett maradék képzése.*
 d) φ *a* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *beágyazás.*

4. *Ha* A, B, C, D *Abel-csoportok,* $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ *és* $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$*, akkor* $\alpha \otimes \beta$ *kétféleképpen értelmezhető: mint leképezések tenzorszorzata, és mint a* $\mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D)$ *egy eleme. Igazoljuk, hogy van olyan* $\Psi : \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D) \to \mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D)$ *homomorfizmus, ami a második értelmezéshez az elsőt rendeli, de* Ψ *általában se nem injektív, se nem szürjektív. (Ötlet: Tekintsük az* $\alpha : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2}$ *beágyazást.)*

5. *Legyen* R *kommutatív egységelemes gyűrű és* A, B, C, D *baloldali unitér* R*-modulusok. Melyek igazak az alábbi izomorfizmusok közül?*
 a) ${}_R R \otimes A \cong A$.
 b) $\mathrm{Hom}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C)$.
 c) $\mathrm{Hom}(A, C \times D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(A, D)$.
 d) $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C \otimes D) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \otimes \mathrm{Hom}(B, D)$.
 e) $(A \times B) \otimes C \cong (A \otimes C) \times (B \otimes C)$.
 f) $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$.

6. *Legyen* R *kommutatív egységelemes gyűrű,* $A \leq B$ *és* $C \leq D$ *baloldali unitér* R*-modulusok. Jelölje* U *az* $a \otimes c$ *alakú elemek által generált részcsoportot* $B \otimes D$*-ben, ahol* a *befutja* A*-t és* c *befutja* C*-t.*
 a) *Mutassuk meg, hogy* U *homomorf képe* $A \otimes C$*-nek.*
 b) *Igaz-e, hogy* $B/A \otimes D/C \cong (B \otimes D)/U$?
 c) *Igaz-e, hogy* U *és* $A \otimes C$ *izomorfak?*
 d) *Igaz-e, hogy* U *és* $A \otimes C$ *izomorfak, ha* R *test?*