Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Ötödik és hatodik alkalom

A kvadratikus alakokhoz és az euklideszi terekhez sok további feladat található a Fried Ervin által írt kiegészítő jegyzet ötoldalas darabjában. Ezek, és az alábbi, modulusokról szóló feladatok alkotják az ötödik és a hatodik gyakorlat anyagát.

1. *Modulusok, illetve unitér modulusok-e az alábbi struktúrák?*

a) *A valós együtthatós polinomok az összeadásra nézve $\mathbb{Q}$ felett a $q \circ p(x) = qp(1)$ (mint konstans polinom) szorzással.*

b) *A $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ Abel-csoport az $\mathbb{R}$ gyűrű felett az $r \circ (a,b) = (ra, rb)$ szorzással.*

c) *Az előbbi G az $\mathbb{R}$ felett az $r \circ (a,b) = (ra, 0)$ szorzással.*

d) *Az előbbi G az $\mathbb{R}$ felett az $r \circ (a,b) = (ra + rb, ra - rb)$ szorzással.*

e) *Az előbbi G a $\mathbb{C}$ felett az $(r + is) \circ (a,b) = (ra, sb)$ szorzással.*

f) *Az előbbi G a $\mathbb{C}$ felett az $(r + is) \circ (a,b) = (ra - sb, rb + sa)$ szorzással.*

g) *Tetszőleges A Abel-csoport $\mathbb{Z}$ felett, ahol $n \circ a = na$ jelentése a szokásos.*

h) *Ha S részgyűrűje R-nek, akkor R az S felett, ahol az összeadás az R-beli összeadás, és $s \circ r = sr$ (R-beli szorzás).*

i) *Ha S balideálja R-nek, akkor S az R felett, ahol az összeadás az S-beli összeadás, és $r \circ s = rs$ (R-beli szorzás).*

j) *Egy halmaz összes részhalmaza a kételemű test felett, az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, $0 \circ H = \emptyset$, $1 \circ H = H$.*

2. *Legyen M az R gyűrű, mint az S részgyűrűje feletti modulus, ahol az összeadás az R-beli összeadás, és $s \circ r = sr$ (R-beli szorzás). Modulus-homomorfizmusok-e az alábbi függvények?*

a) *$\varphi : M \to M$; $\varphi(r) = tr$ ($t \in R$ rögzített).*

b) *$\varphi : M \to M$; $\varphi(r) = rt$ ($t \in R$ rögzített).*

3. *Tegyük $\mathbb{R}$ additív csoportját modulussá $\mathbb{R}[x]$ felett kétféleképpen. Az első modulus szorzása $p(x) \circ r = p(1)r$, a másodiké $p(x) \circ r = p(2)r$. Izomorf modulusokat kaptunk-e?*

4. *Legyen V egy n-dimenziós vektortér, és $R = \mathrm{Hom}(V)$. Tegyük V-t R-modulussá az $A \circ v = A(v)$ szorzással. Mik lesznek a kapott modulus részmodulusai?*

5. *Legyen A Abel-csoport, és R az A endomorfizmusainak gyűrűje a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra. Mutassuk meg, hogy a $\varphi \circ a = \varphi(a)$ az A-t baloldali R-modulussá teszi. Hogyan viszonylik ez a modulus az előző feladatban megadott modulushoz? Mely modulusok kaphatók meg ezzel a módszerrel?*

6. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) *Mutassuk meg, hogy az $M = \mathbb{R}^3$ a $pv = p(A)v$ definícióval $\mathbb{R}[x]$-modulus.*

b) *Igazoljuk, hogy u generálja M-et (azaz M ciklikus).*

c) *Mutassuk meg, hogy az A-invariáns alterek éppen a részmodulusok.*

d) *Adjunk meg egy „szép” bijekciót M részmodulusai és $x(x-1)^2$ osztói között.*