Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév
Negyedik alkalom

1. *Legyen A a valós sík egy lineáris transzformációja, melynek m minimálpolinomja másodfokú. Igazoljuk az alábbiakat.*

a) *Ha m reducibilis $\mathbb{R}$ felett, akkor létezik olyan M lineáris transzformáció, és $a, b \in \mathbb{R}$, hogy $A = aI + bM$, és $M^2 = I$, de $M \neq I$.*

b) *Ha m irreducibilis $\mathbb{R}$ felett, akkor létezik olyan K lineáris transzformáció, és $a, b \in \mathbb{R}$, hogy $A = aI + bK$, és $K^2 = -I$.*

c) *Keressünk olyan bázist, melyben az M illetve K mátrixa „minél szebb”.*

2. *Legyen A az U vektortér egy lineáris transzformációja, és $u \in U$. Jelölje $m_{A,u}$ azt a minimális fokú normált polinomot, melyre $m_{A,u}(A)(u) = 0$.*

a) *Határozzuk meg az $m_{A,u}$ polinomot tetszőleges u esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.*

b) *Mutassuk meg, hogy $m_{A,u}$ mindig létezik.*

c) *Igazoljuk, hogy $m_{A,u}$ osztója minden olyan h polinomnak, amelyre $h(A)(u) = 0$.*

d) *Igazoljuk, hogy m_A az összes $m_{A,u}$ legkisebb közös többszöröse, midőn u befutja U-t.*

3. *Igaz-e, hogy tetszőleges legfeljebb n-edfokú $m(x)$ polinomhoz van az n-dimenziós vektortérnek egy olyan lineáris transzformációja, amelynek $m(x)$ a minimálpolinomja? Mely polinomok állnak elő egy alkalmas lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként?*

4. *Legyen A lineáris transzformáció egy komplex feletti n-dimenziós U vektortéren.*

a) *Igazoljuk, hogy ha $k \leq n$, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.*

b) *Mutassuk meg, hogy alkalmas bázisban A mátrixa felső háromszögmátrix.*

c) *Egy felső háromszögmátrix hatványainak főátlójában milyen számok állnak?*

d) *Mik lesznek A hatványainak sajátértékei? Mit mondhatunk ezek multiplicitásairól?*

5. *Tekintsük a $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ és a $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett. Írjuk fel ezek mátrixát, transzformáljuk őket négyzetösszeggé, és határozzuk meg kvadratikus karakterüket.*

6. *Legyen Q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1, \ldots, e_n$ egy Q-ortogonális bázis, és $U = \langle e_i \mid Q(e_i) > 0 \rangle$, $V = \langle e_i \mid Q(e_i) \geq 0 \rangle$, $W = \langle e_i \mid Q(e_i) = 0 \rangle$. E három altér közül melyek függetlenek az $e_1, \ldots, e_n$ bázistól?*

7. *Mutassuk meg, hogy ha Q kvadratikus alak egy véges dimenziós, $\mathbb{R}$ feletti vektortéren, és $x \neq 0$ esetén $Q(x) \neq 0$, akkor Q definit. Igaz-e az állítás $\mathbb{Q}$ felett? És $\mathbb{C}$ felett?*

8. *Igaz-e, hogy a kvadratikus alakok vektorterében a pozitív definit alakok halmaza zárt az összeadásra? És a pozitív szemidefiniteké? Hát az indefiniteké?*

9. *Előáll-e minden kvadratikus alak két pozitív definit kvadratikus alak különbségeként?*

10. *Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbb{C}$ feletti vektortéren értelmezett bilineáris függvény egyértelműen felírható $A + Bi$ alakban, ahol A és B Hermitikus.*

11. *Legyen B pozitív definit bilineáris függvény az n-dimenziós V vektortéren. Igaz-e, hogy tetszőleges $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a $|((B(v_i, v_j))|$ determináns nullától különböző?*