Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Harmadik alkalom

1. *Határozzuk meg az alábbi A lineáris transzformációk illetve mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeiket, sajátaltereiket, invariáns altereiket és minimálpolinomját.*

a) A az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) V a sík $\mathbb{R}$ felett, A pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

c) V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).

2. *Bizonyítsuk be, hogy a háromdimenziós valós térben minden transzformációnak van sajátvektora. Milyen dimenziók esetében érvényes az analóg megállapítás?*

3. *Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.*

4. *Milyen kapcsolatban állnak egy A mátrix karakterisztikus polinomjának együtthatói A nyomával illetve determinánsával? Igazoljuk a Cayley-Hamilton-tételt kétszer kettes mátrixokra. Oldjuk meg az $X^2 = -E$ és az $X^2 = 0$ egyenleteket $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha az A transzformáció c-hez tartozó sajátaltere k dimenziós, akkor c az A karakterisztikus polinomjának legalább k-szoros gyöke. Adjunk meg olyan példát, ahol nem áll fenn egyenlőség.*

6. *Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, melyeknek másodfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?*

7. *Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbb{C}$ feletti mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomjának nincsenek többszörös gyökei.*

További gyakorló feladatok

8. *Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ is B-invariáns altér.*

9. *Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n-dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A-nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A-val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.*

10. *Van-e olyan $M \in \mathbb{Q}^{100\times 100}$ mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van?*

11. *Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?*

12. *Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.*

13. *Legyen A olyan lineáris transzformáció egy páratlan dimenziós, $\mathbb{Q}$ feletti vektortéren, melynek minimálpolinomja másodfokú. Bizonyítsuk be, hogy A-nak van sajátvektora.*