Matematikus gyakorlat, első évfolyam második félév

Első alkalom

A továbbiakban jelölje $V = V_1 \oplus V_2$ azt a tényt, hogy a V vektortér a V_1 és V_2 altereinek a direkt összege. Többtagú összeg esetén használjuk a $V = \oplus_i V_i$ jelölést. Ilyenkor $\mathbf{v} \in V$-re $\mathbf{v} = v_1 + v_2$, ill. $\mathbf{v} = \sum_i v_i$, ahol $v_i \in V_i$. Direkt szorzatra a $V = V_1 \times V_2$, ill. a $V = \prod_i V_i$ jelöléseket használjuk. Ilyenkor $\mathbf{v} \in V$-re $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, ill. $\mathbf{v} = (\dots, v_i, \dots)$, ahol $v_i \in V_i$. Az előző félévben beláttuk, hogy ha V vektortér és $U \leq V$, akkor van olyan $U' \leq V$, hogy $U \oplus U' = V$ (VIII/9b), és azt is, hogy ha α idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, akkor $\mathrm{Im}(\alpha) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha) = V$ (IX/5).

1. *Tegyük fel, hogy $V = V_1 \oplus V_2$.*
- a) *Mutassuk meg, hogy $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.*
- b) *Igaz-e, hogy ha $V = U_1 \oplus U_2$, és $V_1 = U_1$, akkor $V_2 = U_2$? Hát az, hogy $V_2 \simeq U_2$?*
- c) *Mutassuk meg, hogy a $\pi_1 : \mathbf{v} \mapsto v_1$ és $\pi_2 : \mathbf{v} \mapsto v_2$ hozzárendelések lineáris leképezések, azaz $\pi_i \in Hom(V, V)$. (A π_i leképezést nevezzük a V_i altérre való vetítésnek a V_j mentén, ahol $i \neq j$ és $i, j \in \{1, 2\}$.)*
- d) *Igazoljuk, hogy hogy π_1 és π_2 idempotens transzformációk, és $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$.*
- e) *Mutassuk meg, hogy $\pi_1 + \pi_2 = id_V$.*
- f) *Általánosítsuk a c), d), e) állításokat véges sok tagú direkt összegre.*

2. *Tegyük fel, hogy $\alpha \in Hom(V, V)$ idempotens, $\beta \in Hom(V, V)$ tetszőleges. Mit jelentenek az α és a β transzformációkra nézve az alábbi összefüggések: $\alpha\beta = \beta$, $\beta\alpha = \beta$, $\alpha\beta = \alpha$, $\beta\alpha = \alpha$, $\alpha\beta = 0$. Mit jelentenek az előbbi összefüggések akkor, ha β is idempotens?*

3. *Mutassuk meg, hogy létezik egy $\phi : \oplus_i V_i \to \prod_i V_i$ injektív homomorfizmus.*

4. *A valós számsorozatok V vektorterében legyen V_i azon $(r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$ sorozatok halmaza, melyekre $r_j = 0$ minden $j \neq i$-re.*
- a) *Mutassuk meg, hogy $V \neq \oplus_i V_i$.*
- b) *Melyik $U \leq V$ altérre lesz $U = \oplus_i V_i$?*

5. *Legyenek $G_1, \dots, G_n$ csoportok és G ezek direkt szorzata.*
- a) *Mikor lesz G kommutatív?*
- a) *Hogyan fejezhető ki G elemeinek rendje az elem komponenseinek rendjével?*

6*. *Előáll-e $\mathbb{Z}^+$ véges csoportok (esetleg végtelen sok tényezős) direkt szorzatának részcsoportjaként? Előáll-e így minden kommutatív csoport?*

7. *Állapítsuk meg, hogy gyűrűk direkt szorzata mikor lesz egységelemes, illetve test.*

8. *Állapítsuk meg a sík szokásos geometriai transzformációinak, illetve a deriválásnak, mint polinomokon értelmezett lineáris transzformációnak a sajátértékeit.*

9. *Bizonyítsuk be az alábbi deriválási szabályokat (polinomokra):*
- a) $(x^n)' = nx^{n-1}$;
- b) $(f + g)' = f' + g'$;
- c) $(fg)' = f'g + fg'$;
- d) $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.